VÉGES MATEMATIKA

egyetemi jegyzet

Elekes György

előadásai alapján

készítette:

Brunczel András

ELTE, 2001

Tartalomjegyzék

1. Bevezető példák **1**
1.1. A königsbergi hidak 1
1.2. Háromszínű háromszögek 2
1.3. Végtelen utak 3

2. Gráf algoritmusok **5**
2.1. Gráfok tárolása 5
2.2. Szélességi keresés 7
2.3. Összefüggőség eldöntése 8
2.4. Komponensek meghatározása 8
2.5. Rosszindulatú manó 9
2.6. Mélységi keresés 10

3. Párosítás páros gráfokban **14**
3.1. Házasítás és elnökválasztás 14
3.2. Párosítás létezésének feltétele 15
3.3. Maximális párosítás keresése 17

4. A Ramsey-tételkör **19**
4.1. Véges Ramsey-tétel 19
4.2. Végtelen Ramsey-tétel 21
4.3. A véges és végtelen Ramsey-tételek kapcsolata 22
4.4. Ramsey-tételek halmazrendszerekre 23

5. Konvex sokszögek **24**
5.1. Nagy konvex sokszögek létezése 24
5.2. Konvex és konkáv ívek 25
5.3. Nagy konvex sokszögek 28

6. Síkgráfok **30**
6.1. Síkgráfok tulajdonságai 30
6.2. Térképek színezése 32

7. Legrövidebb utak **35**
7.1. Dijkstra-algoritmus 35
7.2. Kupacok 36
7.3. Kupacrendezés 37

8. Mohó algoritmusok **39**
8.1. Amikor a mohóság nem vezet célra 39
8.2. Minimális költségű feszítő fa 40
8.3. A Kruskal-algoritmus megvalósítása 40

9. Gráfok kromatikus száma **43**
9.1. A kromatikus szám fogalma 43
9.2. Kromatikus szám és teljes részgráfok 43
9.3. Kromatikus szám és fokszámok 44
9.4. Végtelen gráfok kromatikus száma 46

10. Extremális gráfok **47**
10.1. Turán-tétel 47
10.2. Maximálishoz közeli távolságok száma 49
10.3. Maximális élszám páros gráfok tiltása esetén 50
10.4. Egyforma távolságok száma 52

11. Véges geometriák **53**
11.1. Véges geometria fogalma és tulajdonságai 53
11.2. Reimann-konstrukció 56

12. Minimax tételek **57**
12.1. Kőnig-tétel 57
12.2. Menger-tételek 58
12.3. Max-vissza keresés 60
12.4. Él-összefüggőségi szám meghatározása 61
12.5. Hálózati folyamok 62
12.6. Részben rendezett halmazok 66

13. Extremális halmazrendszerek **69**
13.1. Klasszikus extremális halmazrendszerek 69
13.2. Lineáris algebrai módszerek 72
13.3. Polinom-módszer 74
13.4. Bollobás tétele 76
13.5. Lefogások halmazrendszerekben és gráfokban 77
13.6. Tiltott metszetek 77
13.7. Színezések és egységtávolságok 80
13.8. Borsuk-probléma 81

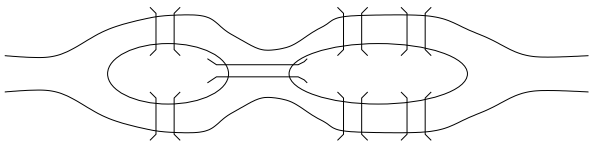
A. Leszámlálás **84**
A.1. A szita-módszer 84
A.2. Golyók és dobozok 85
A.3. A generátor-függvény fogalma és tulajdonságai 86
A.4. Catalan-számok 88
A.5. Szám-partíciók 89
A.6. Permutációk egy alkalmazása: a Scott-probléma 89

1. fejezet

Bevezető példák

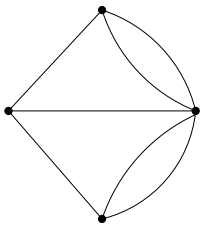
1.1. A königsbergi hidak

A következő probléma valószínűleg az első gráfelméleti jellegű kérdés volt. Kétszáz évvel ezelőtt Königsberg lakosai gyakran sétálgattak a várost átszelő folyó két partját és a folyó két szigetét összekötő hidakon. A térkép az 1.1. ábrán látható. Szerették volna úgy végigjárni



1.1. ábra. A königsbergi hidak.

a hidakat, hogy a séta során mindegyiken pontosan egyszer haladjanak át. Mivel sehogy sem sikerült ilyen útvonalat találni, Eulerhez, a városban lakó matematikushoz fordultak, magyarázza meg nekik, miért nem lehetséges ez. Ahhoz, hogy Euler válaszát megértsük, rajzoljuk le az előző ábrát másként. Az 1.2. ábrán a csomópontok, vagy más néven csúcsok a szigeteknek és a folyó két partjának, míg az őket összekötő vonalak (élek), a hidaknak felenek meg. Az ilyen, csúcsokból és élekből álló struktúrákat gráfoknak nevezzük.



1.2. ábra. A königsbergi hidak egyszerűsített rajza.

Akárhogy választjuk meg az útvonalunkat, bármely csúcsra fennáll, hogy ugyanannyiszor érkezünk meg oda, mint ahányszor onnan továbbindulunk, kivéve esetleg a kiindulási és a végpontot, ha ezek nem azonosak. Tehát ha minden élt pontosan egyszer használunk fel, akkor a csúcsokhoz legfeljebb kettő kivételével páros számú élnek kell kapcsolódnia. Ese-

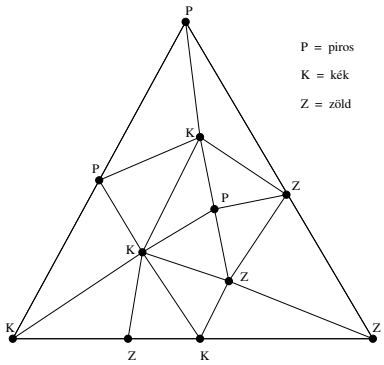
tünkben viszont minden pontra éppen páratlan számú él illeszkedik, tehát nem lehetséges minden élt (hidat) bejárni úgy, hogy valamelyiket ne használnánk többször is.

1.2. Háromszínű háromszögek

A következő lemma bizonyításának érdekessége, hogy valaminek a létezését úgy látjuk be, hogy megmutatjuk, páratlan sok van belőle.

Tekintsünk egy háromszöget, amelynek csúcsai piros, kék, illetve zöld színre vannak színezve. Helyezzünk el véges sok pontot a háromszög belsejében úgy, hogy azok esetleg illeszkedhetnek az oldalakra is, de a csúcsokra már nem. Jelöljük ezeket a pontokat $P_1, P_2, \ldots, P_n$-nel, ahol n természetes szám. Osszuk a háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy a háromszögek oldalai olyan szakaszok legyenek, amelyeknek végpontjai a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok és a nagy háromszög csúcsai közül kerülnek ki, és a végpontok kivételével nem illeszkedik rájuk a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok egyike sem.

A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat színezzük piros, kék vagy zöld színre azzal a megkötéssel, hogy a nagy háromszög valamelyik oldalára illeszkedő pontok csak az oldal két végpontjának színét kaphatják. Ilyen színezés látható az 1.3. ábrán.



1.3. ábra. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok egy színezése.

1.2.1. Lemma (Sperner). *A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok tetszőleges ilyen színezése esetén létezik olyan kis háromszög, melynek mindhárom csúcsa különböző színű.*

Bizonyítás. Egy kis háromszöget nevezzünk jónak, ha mindhárom csúcsa különböző színű, illetve rossznak, amennyiben létezik két azonos színű csúcsa. Ahhoz, hogy belássuk, létezik jó háromszög, nyilván elegendő azt megmutatni, hogy a jó háromszögek száma páratlan.

Egy kis háromszög valamely oldalát nevezzük jónak, ha a rá illeszkedő csúcsok eltérő színűek, rossznak, ha megegyező színűek. Ezek szerint egy rossz háromszög attól függően, hogy 2 vagy 3 azonos színű csúcsa van, rendre 0 vagy 2 jó oldallal rendelkezik. Ezzel szemben egy jó háromszögnek minden esetben 3 jó oldala van. Vegyük észre, hogy jó háromszögek esetén a jó oldalak száma páratlan, míg rossz háromszögek esetén páros. Most adjuk össze az összes kis háromszög jó oldalainak számát. Egy összeg csak akkor lehet páratlan, ha páratlan sok páratlan tag szerepel benne, tehát ha megmutatjuk, hogy a szóban forgó összeg páratlan, az pontosan azt fogja jelenti, hogy a jó háromszögek száma is páratlan.

A kis háromszögek oldalai két típusba sorolhatók, vannak olyanok, amelyek a nagy háromszög valamely oldalán helyezkednek el, és vannak olyanok, amelyek a nagy háromszög

belsejében. E két típusba tartozó szakaszokat nevezzük rendre határszakaszoknak, illetve belső szakaszoknak. A fenti összegben a jó határszakaszok csak egyszer szerepelnek, a jó belső szakaszok viszont kétszer, mivel ők két kis háromszögnek is az oldalai. Ez azt jelenti, hogy az összeg pontosan akkor páratlan, ha a jó határszakaszok száma páratlan. Ehhez megmutatjuk, hogy a nagy háromszög mindhárom oldalán páratlan sok jó határszakasz található. Valamely oldalon vegyük sorra a rá illeszkedő pontokat az egyik csúcsból indulva. Az oldalakra illeszkedő pontok színére tett megszorítás miatt minden ilyen pont színe megegyezik a két csúcs valamelyikének színével (1.4. ábra).

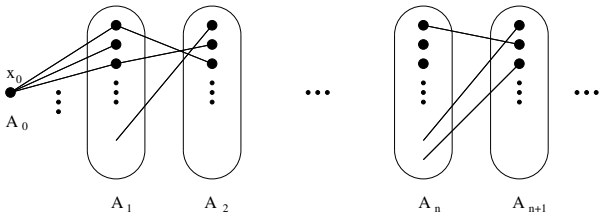
1.4. ábra. A kék és a zöld csúcs által meghatározott oldal.

Egy jó szakasz egy színváltást jelent a két szín között. Mivel a pontsorozat első és utolsó tagja eltérő színű, ezért a színváltások száma, azaz a jó határszakaszok száma az oldalon páratlan. □

1.3. Végtelen utak

Utolsó bevezető példaként álljon itt egy lemma, amely Kőnig Gyula nevéhez fűződik, és elegendő feltételt mond ki végtelen út létezésére bizonyos gráfokban.

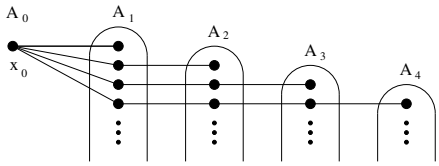
Minden n természetes számra A_n legyen csúcsok nem üres halmaza. Legyen az A_0 egyelemű, továbbá az A_n csúcshalmazok legyenek diszjunktak. Tegyük fel, hogy minden A_n halmaz ($n > 0$) minden csúcsa össze van kötve az A_{n-1} halmaz valamely csúcsával (1.5. ábra).



1.5. ábra. Az $A_0, A_1, A_2, \ldots$ halmazok.

Vizsgáljuk meg, hogy az így definiált végtelen sok csúcsot tartalmazó gráfban milyen messzire tudunk eljutni az A_0 halmaz x_0 csúcsából! Egy csúcssorozatot és a sorozat szomszédos csúcsait összekötő éleket nevezzük útnak. Az út hosszán értsük a benne szereplő élek számát. Feltevésünk miatt nyilvánvaló, hogy tetszőleges A_n halmaz tetszőleges x csúcsából n hosszú, „visszafelé" haladó úton el tudunk jutni x_0-ba, tehát létezik x_0 csúcsból induló, tetszőlegesen hosszú véges út. Ebből viszont nem következik az, hogy létezik végtelen út is. Az 1.6. ábra olyan gráfot ábrázol, ahol ez nem is igaz. Ebben a példában az A_n halmazok végtelenek. Most megmutatjuk, hogy ezen halmazok véges volta elegendő feltétel a végtelen út létezéséhez.

1.3.1. Lemma (Kőnig). *Ha minden A_n véges, nem üres halmaz, és minden $n > 0$ esetén az A_n minden csúcsából vezet él az A_{n-1} halmazba, akkor a gráf tartalmaz x_0-ból induló végtelen utat.*



1.6. ábra. Nem létezik végtelen út.

Bizonyítás. Amint már megjegyeztük, a gráf minden csúcsából el tudunk jutni kizárólag visszafelé haladó éleken az x_0-ba. Ez végtelen sok egymástól különböző véges utat jelent. (A továbbiakban ezeket egyszerűen „út"-ként említjük). Mivel az A_1 véges, ezért csak véges sok él halad A_0 és A_1 között. Így szükségszerűen van közöttük legalább egy olyan él, amelyen végtelen sok különböző út halad át. Legyen ez például az x_0-ból az $x_1 \in A_1$ csúcsba tartó él. Most az utak közül tekintsük az x_1-en áthaladó végtelen sok utat. Az A_2 véges volta miatt nyilván létezik egy olyan $x_2 \in A_2$, amelyen ezek közül végtelen sok halad át. Ezt a gondolatmenetet folytatva minden n esetén létezik olyan $x_n \in A_n$, hogy az x_n végtelen sok x_0-ba tartó, visszafelé haladó úton rajta van, és minden x_n össze van kötve x_{n+1}-gyel. Tehát az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ végtelen sorozat a gráf egy végtelen útját határozza meg. □

Természetesen a most bizonyított és az előző fejezetben szereplő állítást nem véletlenül nevezik lemmának, azaz segédtételnek, ugyanis felhasználták őket bizonyos tételek bizonyításához. Arra most nem térünk ki, hogy pontosan mik is ezek a tételek.

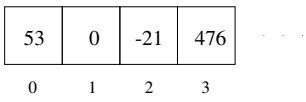
2. fejezet

Gráf algoritmusok

2.1. Gráfok tárolása

A bevezető példákban a gráfokat pontokból és őket összekötő vonalakból álló ábraként kezeltük, és vizsgáltuk bizonyos tulajdonságaikat. Ez a módszer működik mindaddig, amíg csak néhány csúcsról van szó. Ha viszont több ezer csúcsot tartalmaz a gráf, célszerű a számítógép segítségét igénybe venni, és a számítógépek által végrehajtható módszert, vagy más néven algoritmust adni, amely megoldja a kitűzött feladatot. A számítógép azonban nem képes hatékonyan dolgozni gráfokkal, amennyiben azokat az eddigi grafikus szemlélet szerint kezeljük, ezért szükségünk van egy, a számítógép által jól érthető tárolási módra.

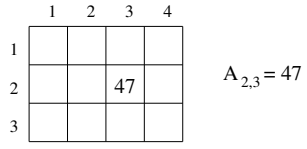
Adatok tárolására adott méretű memóriarekeszek szolgálnak, melyek sorszámozva vannak. A rekeszek közvetlenül elérhetők ezen sorszám, vagy más néven memóriacím alapján. Minden egyes rekesz az adatok egy jól elhatárolt részét tartalmazza, például egy egész számot (2.1. ábra).



2.1. ábra. Memóriarekeszek.

Általában a számítógépek képesek ilyen memóriarekeszekből álló, összetett adatszerkezeteket is kezelni, mint például a tömbök és a listák. Ezek logikailag összetartozó adatok tárolására szolgálnak.

A tömb egy, kettő vagy több dimenziós, rögzített méretű táblázat, melynek elemei közvetlenül elérhetők a táblázatban elfoglalt pozíciójuk, más néven indexük alapján (2.2. ábra).



2.2. ábra. Kétdimenziós tömb.

A lista rekeszpárok sorozata, ahol a párok első tagja az adott elem értékét, a második tagja

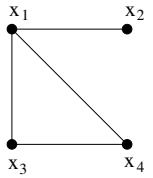
pedig a következő listaelem memóriabeli címét tartalmazza. Ezt a második tagot mutatónak (pointer) nevezzük. A lista utolsó elemének mutatója egy megkülönböztetett érték, amely jelzi, hogy a listának nincs további eleme (2.3. ábra). A lista első elemének ismeretében a

2.3. ábra. Lista.

mutatók segítségével elérhető minden elem annak ellenére, hogy az elemeket általában nem feltétlenül egymást követő memóriarekeszekben tároljuk.

Az, hogy e két szerkezet közül melyik használata a célszerű, attól függ, mire használjuk őket. A tömbben való tárolás előnye, hogy elemei egy lépésben elérhetők, hátránya viszont, hogy méretét használata előtt rögzíteni kell, ezért amennyiben a benne tárolt elemek száma idővel változik, előfordulhat, hogy sok rekesz kihasználatlan marad, illetve az is, hogy a tömb megtelik, és nem tudunk új elemet elhelyezni benne. A listáknál ez a probléma nem lép fel, hiszen hosszuk dinamikusan változtatható, viszont egy elem elérése legrosszabb esetben, történetesen az utolsó elem esetén annyi lépésből áll, amennyi elemet a lista tartalmaz.

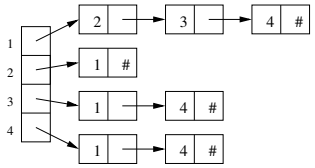
Egy gráf csúcsait jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A gráfot tárolhatjuk egy kétdimenziós tömbben, melynek n sora és n oszlopa van. Az i-edik sor j-edik oszlopába írjunk 1-et, ha x_i és x_j között van él, 0-át, ha nincs. Ez a tömb, amelyet a gráf csúcsmátrixának nevezünk, n^2 memóriarekeszből áll (2.4. ábra).



0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0

2.4. ábra. Gráf tárolása csúcsmátrixszal.

Amennyiben a gráf ritka, azaz n^2-nél jóval kevesebb élt tartalmaz, létezik kisebb tárigényű megoldás is. Tekintsünk egy n elemű egydimenziós tömböt, ahol minden elem egy csúcsnak felel meg. A tömb i-edik eleme legyen egy mutató egy listára, melynek elemei legyenek azon csúcsok sorszámai, amelyek az x_i-vel össze vannak kötve. Ezeket a listákat éllistáknak nevezzük (2.5. ábra).



2.5. ábra. Az előző ábrán látható gráf tárolása éllistákkal.

Jelölje e a gráf éleinek számát. Egy listaelem két memóriarekeszt foglal, illetve minden él pontosan két listában szerepel, ezért a listák együttes tárigénye $4e$, azaz az élszám konstansszorosa. Tegyük fel, hogy $e = n$. Ekkor már $n \geq 5$ esetén $n^2 > 4n$. Hasonlóan tetszőleges $C > 0$ esetén létezik egy olyan n, melytől kezdve $n^2 > Cn$. Így azt mondhatjuk, hogy az n^2 kifejezés nagyságrendileg nagyobb az n bármely konstansszorosánál, tehát elméleti szempontból a konstans szorzó tulajdonképpen lényegtelen. Ezért egy algoritmus tárigényének és

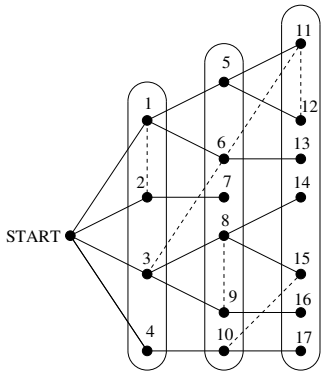
futási idejének gyakran csak a nagyságrendjét vizsgáljuk a bemenő adatok mennyiségének függvényében. A nagyságrendek összehasonlítását könnyíti meg a következő definíció:

2.1.1. Definíció. *Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények, és legyen $f, g > 0$. Azt mondjuk, hogy $f(n) = O(g(n))$ (ejtsd: ordó $g(n)$), ha létezik olyan $C > 0$, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) \leq Cg(n)$.*

A listák együttes tárigénye tehát $O(e)$. Ehhez jön még az n elemű tömb, így összesen $O(e + n)$ tárhely szükséges a gráf tárolásához.

2.2. Szélességi keresés

Tekintsünk egy gráfot, és egy kitüntetett csúcsát nevezzük el *START* csúcsnak. A szélességi keresés a gráf csúcsainak adott sorrendben történő bejárását jelenti. A *START* csúcsból indulunk ki, majd az ehhez kapcsolódó csúcsok következnek. Ezután az így elért csúcsok szomszédjai jönnek a sorban ügyelve arra, hogy a már elért csúcsokat ne vegyük ismét sorra. A bejárási sorrendet a 2.6. ábra szemlélteti. Az ábrán folytonos vonal jelöli azokat az éleket,



2.6. ábra. Szélességi keresés.

amelyek a bejárás sorrendjét meghatározzák. A szaggatott vonallal jelzett éleket figyelmen kívül kell hagyni, mert olyan csúcsokba vezetnek, amelyeket már korábban elértünk.

Az algoritmus megvalósításához egy tömböt és egy listát használunk:

Tömb Minden csúcsra tároljuk, hogy elértük-e már.
Kezdetben minden csúcsra: *NEM*.

Lista Azon csúcsok listája, amelyeket már elértünk, de szomszédjait még nem vizsgáltuk.
Kezdetben legyen üres.

Az algoritmus lépései:

1. A *START* csúcsot betesszük a listába.
2. A *START* csúcs elért-e := *IGEN*.
3. Amíg a lista nem üres:
   - Vegyük ki a listából az első elemét, és jelöljük ezt x-szel.

- x minden nem elért y szomszédjára:
  - y csúcs elért-e := *IGEN*.
  - y-t betesszük a lista végére.

Vizsgáljuk meg az algoritmus futási idejét. A tömbben egy elem módosítása egy lépésből áll. Ahhoz, hogy a lista végére való beszúrás is gyorsan elvégezhető legyen, tartsunk nyilván egy mutatót, amely mindig a lista utolsó elemére mutat. Így a beszúrás is konstans sok lépésben elvégezhető. Amennyiben a gráfot csúcsmátrixban tároljuk, egy listából kivett csúcs szomszédjainak vizsgálata n lépésből áll. Minden csúcs legfeljebb egyszer kerül be a listába, tehát a teljes futási idő $O(n^2)$.

Ha éllistákat használunk, akkor ritka gráfok esetén ennél gyorsabb az algoritmus, hiszen így egy x csúcs szomszédjait $d(x)$ lépésben megvizsgálhatjuk, ahol $d(x)$ az x fokszámát jelöli. Tehát összesítve a lépésszám megegyezik a fokszámok összegével, azaz $2e = O(e)$-vel.

2.3. Összefüggőség eldöntése

2.3.1. Definíció. *Egy gráfot* **összefüggőnek** *nevezünk, ha bármely két csúcsa között létezik út.*

Az összefüggőségnek elegendő feltétele (és persze szükséges is), hogy egy rögzített csúcsból bármely más csúcsba vezessen út. Szélességi keresést alkalmazva eldönthetjük, hogy a gráf összefüggő-e, ugyanis a *START* csúcsból pontosan azok érhetők el, amelyekhez az algoritmus lefutása után a tömbben *IGEN* van írva. Tehát ha az összes csúcshoz *IGEN* bejegyzés került, a gráf összefüggő, ha pedig n-nél kevesebb az *IGEN*-ek száma, akkor nem összefüggő. Az összeszámlálás elvégezhető $O(n)$ időben a szélességi keresés lefutása után, illetve futás közben is egy számláló segítségével, amelyet 1-gyel növelünk minden esetben, amikor egy *IGEN* bejegyzés kerül a tömbbe. Így az összefüggőség eldöntése csúcsmátrixban történő tárolás esetén $O(n^2)$, éllisták használatával pedig $O(e)$ lépésszámú.

2.4. Komponensek meghatározása

2.4.1. Definíció. *A G gráf G' összefüggő részgráfját a G* **komponensének** *nevezzük, ha maximális, azaz nem létezik olyan tőle különböző G'' összefüggő részgráfja G-nek, amely tartalmazza G'-t.*

Szélességi kereséssel egy gráf komponensekre bontását is elvégezhetjük, ugyanis a *START* csúcsból indulva az algoritmus lefutása után pontosan az elért csúcsok fogják a *START*-ot tartalmazó komponenst alkotni. Amíg létezik nem elért csúcs, hajtsunk végre újabb szélességi keresést az egyik nem elért csúcsból indulva. Így pontosan annyi menetben fogjuk bejárni a teljes gráfot, amennyi komponenst az tartalmaz.

A menetek nyilvántartására bevezetünk egy számlálót, és módosítjuk az eredeti algoritmusban használt tömb szerepét:

Menet Egész szám: hányadik menetben tartunk.

Tömb Minden csúcsra tároljuk, hogy hányadik menetben értük el. Kezdetben minden csúcsra: 0.

Az algoritmus lépései:

1. *Menet* := 1.
2. Amíg létezik 0 bejegyzés a tömbben:
   - *START* := az első 0 bejegyzésű csúcs.
   - Szélességi keresés *START*-ból indulva úgy, hogy egy csúcs elérésekor a tömbbe *IGEN* helyett a *Menet* jelenlegi értékét írjuk.
   - *Menet* := *Menet* + 1.

Az algoritmus befejezése után a tömbben lévő számok mondják meg, melyik csúcs melyik komponensben van.

Vegyük észre, hogy minden élt csak egy menetben vizsgálunk meg, hiszen az olyan élek, melyek végpontjait már elértük, későbbi menetekben már nem kerülnek elő. Tehát a szélességi keresések együttes ideje csúcsmátrix használata esetén $O(n^2)$, éllistákkal történő tárolás esetén pedig $O(e)$. Ezenkívül minden menetben meg kell határoznunk a következő nem elért csúcsot. Ez legrosszabb esetben n lépést vesz igénybe, ha a keresést mindig a tömb elejéről kezdjük. Jobb eredményt érhetünk el, ha folyamatosan nyilvántartjuk az első nem elért csúcs indexét a tömbben, és a következő keresését ettől a csúcstól kezdjük. Így a nem elért csúcsok meghatározása a szükséges adminisztrációval együtt is csak $O(n)$ időt vesz igénybe, tehát a komponensek meghatározása elvégezhető a tárolási módtól függően $O(n^2)$, illetve $O(e+n)$ időben.

2.5. Rosszindulatú manó

A 2.3. fejezetben láttuk, hogy egy csúcsmátrixban tárolt gráfról $O(n^2)$ időben eldönthető, hogy összefüggő-e. Felmerül a kérdés, vajon létezik-e ennél lényegesen gyorsabb algoritmus.

Megmutatjuk, hogy a válasz — általánosabb feltétel esetén is — tagadó.

Egy n csúcsú gráfról úgy szeretnénk megmondani, összefüggő-e, hogy rákérdezhetünk csúcspárokra, össze vannak-e kötve. Létezik-e olyan módszer, amely sosem kérdez meg minden párt? Nyilván sok gráf esetén megtakaríthatunk bizonyos kérdéseket. Ha például kiderült, hogy az i és j, valamint a j és k csúcsok is össze vannak kötve, akkor lényegtelen számunkra, hogy van-e él i és k között. A következő állítás viszont azt mondja ki, hogy bármely módszer esetén van olyan gráf, amelynél egyetlen kérdést sem tudunk megtakarítani.

2.5.1. Állítás. *Minden módszer, amely csúcspárok közötti élek létezésére rákérdezve dönt tetszőleges gráf összefüggőségéről, legrosszabb esetben minden csúcspárt megkérdez.*

Bizonyítás. A bizonyítást a rosszindulatú manó módszerével végezzük. A módszer lényege, hogy a manó úgy válaszol a feltett kérdésekre, hogy ne sikerüljön kevesebb kérdésből dönteni. Tehát a manó a kérdések alapján folyamatosan fogja a kérdező számára kedvezőtlen gráfot felépíteni.

Jelölje V a gráf csúcshalmazát. Válaszoljon a manó a következő stratégia szerint. Ha azt kérdezzük, hogy az i és j csúcsok össze vannak-e kötve,

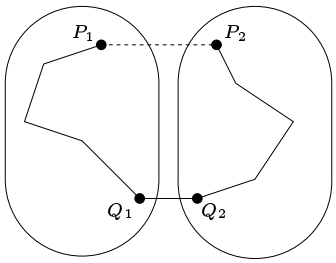
- *IGEN* választ ad a manó, ha a V csúcshalmaz két diszjunkt A és B részre osztható úgy, hogy:
  - $i \in A$,
  - $j \in B$,

– az (i, j) pár kivételével már minden A és B között haladó élt megkérdeztünk, és *NEM* választ kaptunk,

- *NEM* választ ad a manó különben.

Belátjuk, hogy ezzel a stratégiával a manó olyan gráfot alakít ki, ahol minden párt meg kell kérdeznünk ahhoz, hogy dönteni tudjunk.

Tegyük fel indirekt módon, hogy az összes csúcspár megvizsgálása nélkül is tudtunk dönteni. Legyen például $P_1 - P_2$ olyan pár, amelyet nem kérdeztünk meg. Vegyük észre, hogy a manó összefüggő gráfot épít fel, hiszen minden olyan esetben *IGEN* választ ad, amikor egy nemleges válasz a gráf szétesését jelentené. Másrészt a gráf körmentes is lesz, hiszen a manó nem köt össze két csúcsot, ha közöttük már az eddigi válaszok alapján vezet út. Ebből következik, hogy a P_1 és P_2 csúcsokat pontosan egy út köti össze. Tekintsük azt a $Q_1 - Q_2$ csúcspárt, amelyet ezen az úton utoljára kérdeztünk meg (2.7. ábra). A $Q_1 - Q_2$ párra



2.7. ábra. Az utolsóként megkérdezett csúcspár a $P_1 - P_2$ úton.

vonatkozó kérdés feltevésének pillanatában tehát már elérhető Q_1-ből P_1, Q_2-ből pedig P_2 (esetleg $Q_1 = P_1$, vagy $Q_2 = P_2$). Így P_1 és P_2 különböző részekbe esnek azon felosztás szerint, amely alapján a manó *IGEN* választ ad a $Q_1 - Q_2$ kérdésre. Ez ellentmondás, hiszen feltevésünk szerint még nem kérdeztük meg, hogy a P_1 és P_2 csúcsok össze vannak-e kötve. □

2.6. Mélységi keresés

2.6.1. Definíció. *Gráf valamely x csúcsa* **szétvágó pont**, *ha x-et és a rá illeszkedő éleket elhagyva az összefüggő komponensek száma nő.*

2.6.2. Definíció. *Gráf valamely e éle* **szétvágó él**, *ha e-t elhagyva az összefüggő komponensek száma nő.*

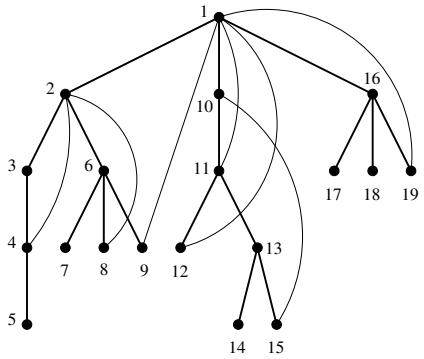
Legyen adott egy összefüggő gráf. Tekintsük a következő két problémát:

1. Létezik-e szétvágó pontja?

2. Létezik-e szétvágó éle?

Láttuk, hogy éllistákkal tárolt gráfról szélességi kereséssel $O(e)$ időben eldönthető, hogy összefüggő-e, így az első kérdésre $O(ne)$, a másodikra pedig $O(e^2)$ időben választ adhatunk. Most ismertetjük a mélységi keresést, majd megmutatjuk, hogy segítségével mindkét kérdés gyorsabban megválaszolható.

Nevezzük a gráf egyik csúcsát START-nak. Ebből indulva, ha lehet, mindig olyan csúcsba lépünk tovább, amit még nem érintettünk. Ha egy csúcs minden szomszédjában jártunk már, akkor visszalépünk azon az élen, amelyiken először jutottunk el ebbe a csúcsba. A bejárásban felhasznált élek egy úgynevezett *mélységi keresőfát* határoznak meg. A 2.8. ábrán a számok a bejárási sorrendet, a vastag élek pedig a mélységi keresőfa éleit jelölik. A bejárási stratégia



2.8. ábra. Mélységi keresés.

miatt teljesül a következő lemma.

2.6.3. Lemma. *Fán kívüli élek csak ős és utód között lehetnek.*

A keresés során a következőket tartjuk nyilván:

mélységi_szám(x) x csúcs sorszáma a bejárás szerint,

honnan(x) annak a csúcsnak az indexe, amelyikből először érkeztünk x-be (kezdetben: 0),

min_le_fel(x) a minimális *mélységi számú* olyan csúcs, amelybe x-ből eljuthatunk úgy, hogy a fa élein lefelé lépünk valahányat (esetleg nullát), majd *legfeljebb* egyet lépünk felfelé fán kívüli élen,

következő_él(x) x-ből kiinduló első nem vizsgált él (csúcsmátrix esetén az él másik csúcsának indexe, éllisták esetén pedig mutató az x-hez tartozó éllista egy elemére) (kezdetben: első x-ből induló él),

sorszám ezt a mélységi sorszámot fogja kapni a következő újonnan elért csúcs (kezdetben: 2),

aktuális a csúcs indexe, ahol jelenleg tartózkodunk (kezdetben: START).

A **min_le_fel** tömbben kiszámolt értékek alapján fogjuk a szétvágó csúcsokat és éleket meghatározni.

A mélységi keresés algoritmusa:

1. mélységi_szám(START) := 1
2. honnan(START) := START
3. Amíg aktuális $\neq$ START vagy létezik következő_él(aktuális):

   Ha létezik következő_él(aktuális) $\rightarrow$ előrelépés:

- honnan(következő_él(aktuális)) := aktuális
- aktuális := következő_él(aktuális)
- következő_él(honnan(aktuális)) := a következő nem vizsgált él
- mélységi_szám(aktuális) := sorszám
- sorszám := sorszám +1

Különben → visszalépés:

- $\text{min_le_fel(aktuális)} := \min \begin{cases} \min\{\text{mélységi_szám}(y) \mid y \neq \text{honnan(aktuális) és létezik (aktuális}, y) \text{ él}\} \\ \min\{\text{min_le_fel}(z) \mid \text{honnan}(z) = \text{aktuális}\} \end{cases}$
- aktuális := honnan(aktuális)

Most megmutatjuk, hogyan használható a mélységi keresés szétvágó élek és csúcsok meghatározására.

2.6.4. Lemma.

(a) A mélységi fán kívüli élek nem szétvágó élek.

(b) Legyen a fában x gyereke y-nak. Az (x, y) él akkor és csak akkor szétvágó, ha a mélységi keresés után

$$min_le_fel(x) = mélységi_szám(x).$$

Bizonyítás. A lemma (a) része triviális. Mivel a fán kívüli élek csak ős és utód között vezethetnek, az (x, y) él akkor és csak akkor szétvágó, ha x részfájából nem vezet él sem y-ba, sem annak őseibe. Az y csúcsnak és őseinek mélységi száma kisebb, mint x mélységi száma, így ez pontosan akkor teljesül, ha $min_le_fel(x) = mélységi_szám(x)$. □

2.6.5. Lemma. *A START csúcs akkor és csak akkor szétvágó pont, ha legalább két gyereke van, egy START-tól különböző y csúcs pedig pontosan akkor szétvágó pont, ha van olyan x gyereke, melyre*

$$min_le_fel(x) \geq mélységi_szám(y).$$

Bizonyítás. A START csúcs különböző részfái között nem halad él, ezért több részfa esetén a START mindenképp szétvágó pont. Valamely y pedig akkor és csak akkor szétvágó, ha van olyan x gyereke, melynek részfájából nem vezet él y egyik ősébe sem. Ez pontosan akkor teljesül, ha $min_le_fel(x) \geq mélységi_szám(y)$. □

A mélységi keresésben előrelépést és visszalépést is $O(n)$-szer hajtunk végre, hiszen egy fa élein lépkedünk. Éllistákkal adott gráf esetén a **következő_él** tömb nyilvántartása összesen $O(e)$ lépést igényel. A **min_le_fel** értékeinek kiszámítása is összesen $O(e)$ időben történik, mert valamely $min_le_fel(x)$ érték meghatározásához csak x szomszédjait kell megvizsgálnunk. Az előre- és visszalépés többi művelete konstans idejű, így a mélységi keresés lépésszáma $O(e + n)$.

A 2.6.4. lemma alapján azok az $(x, \text{honnan}(x))$ élek szétvágó élek, ahol

$$\text{min_le_fel}(x) = \text{mélységi_szám}(x),$$

így $O(n)$ időben meghatározhatjuk a szétvágó éleket. A 2.6.5. lemma szerint $\text{honnan}(x) \neq$ START esetén $\text{honnan}(x)$ pontosan akkor szétvágó pont, ha

$$\text{min_le_fel}(x) \geq \text{mélységi_szám}(\text{honnan}(x)).$$

A START csúcsról $O(n)$ időben eldönthető, hogy szétvágó pont-e, így az összes szétvágó pont meghatározható $O(n)$ időben. Mélységi keresés alkalmazásával tehát mindkét kérdés megválaszolása $O(e+n)$ időt igényel.

Ha egy összefüggő gráf nem tartalmaz szétvágó pontot (szétvágó élt), akkor azt mondjuk, hogy a gráf kétszeresen összefüggő (kétszeresen él-összefüggő).

2.6.6. Definíció. *Egy gráf k-szorosan összefüggő, ha van legalább $k+1$ csúcsa, és bármely $k-1$ csúcsát (és a rájuk illeszkedő éleket) elhagyva összefüggő marad.*

2.6.7. Definíció. *Egy gráf k-szorosan él-összefüggő, ha bármely $k-1$ élét elhagyva összefüggő marad.*

3. fejezet

Párosítás páros gráfokban

3.1. Házasítás és elnökválasztás

Két, egymással rokon problémát ismertetünk most. Az első a *házasság probléma*, amelyet Kőnig Dénes vetett fel. Arthur király udvarában él n lovag és n udvarhölgy. A király szeretné összeházasítani őket úgy, hogy minden házasság kölcsönös szimpátiára épüljön, ezért megbízza Merlint, a varázslót, mondja meg, lehetséges-e ez. Merlin kideríti, hogy minden lovagnak r udvarhölgy tetszik úgy, hogy ez a szimpátia kölcsönös, és hasonlóan minden udvarhölgynek r olyan lovag tetszik, aki ezt viszonozza is. Vajon lehet-e n esküvőt tartani?

A második kérdés a bizottsági elnökök problémája. Tekintsünk néhány bizottságot, illetve azok tagjait. Egy ember szerepelhet több bizottságban is. Minden bizottság élére elnököt kell választani a tagjai közül úgy, hogy egy ember legfeljebb egy bizottságnak legyen az elnöke. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy ezt meg lehessen tenni!

Mindkét probléma átfogalmazható gráfokra. Az első esetben a csúcsok a lovagoknak és az udvarhölgyeknek, a kölcsönös szimpátia pedig az éleknek felel meg. Ekkor a gráf csúcsai két diszjunkt részhalmazra, vagy más néven osztályra oszthatók (nevezetesen a lovagok és udvarhölgyek osztályára) úgy, hogy egy halmazon belül nincsenek élek. Az ilyen gráfokat *páros gráfoknak* nevezzük. (Logikusabb lenne a „kétosztályú gráf" kifejezés, de történeti okokból nem ez honosodott meg. Legelőször „páros körű" gráfoknak nevezték őket, mert minden körük páros.) Esetünkben ráadásul minden csúcs fokszáma r (a gráf *r-reguláris*), és a két osztály azonos elemszámú.

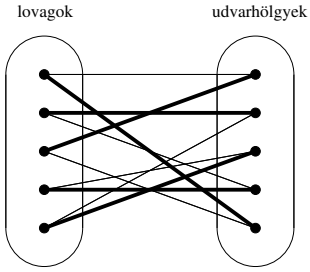
Jelölje $G(V_1, V_2, E)$ azt a páros gráfot, melyben V_1 és V_2 a csúcsok osztályai, E pedig az élek halmaza.

3.1.1. Definíció. *A $\mathcal{T} \subseteq E$ élhalmazt* **teljes párosításnak** *nevezzük, ha a gráf minden csúcsára $\mathcal{T}$-nek pontosan egy éle illeszkedik.*

Feladatunk tehát egy $\mathcal{T}$ teljes párosítás keresése. A 3.1. ábrán az $n = 5$, $r = 2$ esetre látható egy példa, ahol a vastag vonallal jelzett élek egy teljes párosítást határoznak meg.

A második probléma szintén reprezentálható páros gráffal, ahol az egyik osztályt a bizottságok, a másikat pedig az emberek alkotják. Egy bizottság pontosan azokkal az emberekkel legyen összekötve, akik tagjai az adott bizottságnak.

3.1.2. Definíció. *Az $\mathcal{F} \subseteq E$ élhalmazt* **részleges párosításnak** *vagy* **független élrendszernek** *nevezzük, ha a gráf minden csúcsára $\mathcal{F}$-nek legfeljebb egy éle illeszkedik.*



3.1. ábra. A házasság probléma gráf reprezentációja.

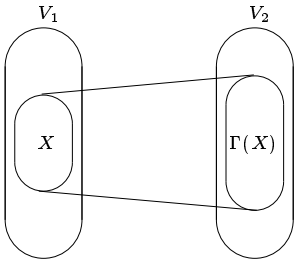
3.1.3. Definíció. *Az $\mathcal{F} \subseteq E$ élhalmaz a V_1* **párosítása** *V_2*-**be**, *ha*

- *$\mathcal{F}$ független élrendszer,*
- *és $\mathcal{F}$ lefedi V_1-et.*

Feladatunk tehát a bizottságok osztályának párosítása az emberek osztályába. Így a megoldásként kapott párosítás élei a bizottság-elnök pároknak fognak megfelelni.

3.2. Párosítás létezésének feltétele

Legyen X részhalmaza a $G(V_1, V_2, E)$ páros gráf egyik osztályának. Jelöljük $\Gamma(X)$-szel azon csúcsok halmazát, amelyek össze vannak kötve X valamely csúcsával (3.2. ábra).



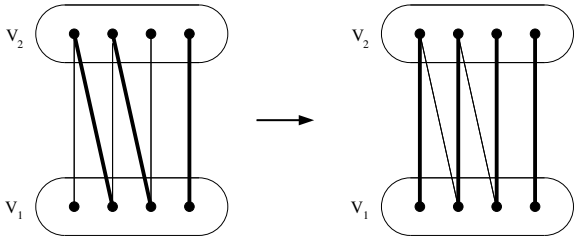
3.2. ábra. Az X csúcshalmaz szomszédai.

3.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $G(V_1, V_2, E)$ páros gráf teljesíti a* **Hall-feltételt**, *ha minden $X \subseteq V_1$ esetén $|\Gamma(X)| \geq |X|$.*

A Hall-feltétel nyilván szükséges ahhoz, hogy V_1 párosítható legyen V_2-be. Megmutatjuk majd, hogy ez a feltétel elegendő is (lásd 3.2.4. tétel).

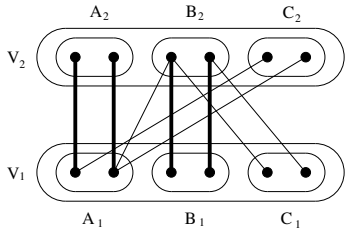
3.2.2. Definíció. *Egy páros gráf valamely útja az $\mathcal{F}$ részleges párosításra nézve* **alternáló út**, *ha élei felváltva $\mathcal{F}$-beliek, illetve nem $\mathcal{F}$-beliek.*

Legyen $\mathcal{F}$ egy részleges párosítás. Amennyiben létezik $\mathcal{F}$-re nézve alternáló út $\mathcal{F}$ által nem fedett pontok között, akkor létezik $\mathcal{F}$-nél nagyobb élszámú részleges párosítás. Valóban, ha az alternáló út $\mathcal{F}$-beli éleit lecseréljük az út nem $\mathcal{F}$-beli éleire, akkor az eredetinél 1-gyel nagyobb elemszámú részleges párosítást kapunk (3.3. ábra).



3.3. ábra. Részleges párosítás javítása alternáló út mentén.

Legyen $G(V_1, V_2, E)$ páros gráf, $\mathcal{F}$ pedig egy részleges párosítás. Jelöljük rendre C_1 és C_2-vel V_1 és V_2 $\mathcal{F}$ által nem fedett csúcsait. Legyenek $B_1 \subseteq V_1$ és $B_2 \subseteq V_2$ a C_1-ből alternáló úton elérhető csúcsok. A V_1 és V_2 fennmaradó csúcsait pedig jelölje A_1, illetve A_2 (3.4. ábra).



3.4. ábra. $\Gamma(B_1 \cup C_1) = B_2$.

3.2.3. Lemma. *Ha $\mathcal{F}$ maximális élszámú, akkor $\Gamma(B_1 \cup C_1) = B_2$.*

Bizonyítás. Ha B_1-ből vagy C_1-ből vezetne él A_2-be, akkor ennek az élnek A_2-beli csúcsa elérhető lenne C_1-ből, ami ellentmond A_2 definíciójának. Ha pedig C_2-be vezetne él, akkor $\mathcal{F}$ nem lenne maximális, mivel létezne alternáló út C_1-ből C_2-be. □

3.2.4. Tétel (Kőnig-Hall). *A V_1 osztály akkor és csak akkor párosítható V_2-be, ha a $G(V_1, V_2, E)$ gráf teljesíti a Hall-feltételt.*

Bizonyítás. A szükségesség, mint említettük, nyilvánvaló. Fordítva, tegyük fel, hogy G teljesíti a Hall-feltételt, és legyen $\mathcal{F}$ egy maximális élszámú részleges párosítása. Belátjuk, hogy $\mathcal{F}$ egyben V_1 párosítása is V_2-be. Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy $\mathcal{F}$ lefedi V_1-et, azaz C_1 üres halmaz. Indirekt módon tegyük fel, hogy C_1 nem üres. A 3.2.3. lemma miatt $\Gamma(B_1 \cup C_1) = B_2$, így

$$|\Gamma(B_1 \cup C_1)| = |B_2| = |B_1| < |B_1 \cup C_1|.$$

Tehát a $B_1 \cup C_1$ halmaz megsérti a Hall-feltételt, ami ellentmondás. □

A tétel alapján szükséges és elégséges feltételt adhatunk a bizottsági elnökök problémájának megoldhatóságára, illetve Merlin is felhasználhatja ugyanezt a tételt.

3.2.5. Következmény. *A bizottsági elnökök problémája akkor és csak akkor oldható meg, ha minden k esetén bármely k darab bizottság uniója legalább k embert tartalmaz.*

3.2.6. Következmény. *A házasság probléma mindig megoldható.*

Bizonyítás. Bármely k darab lovagtól összesen $k \cdot r$ él indul ki. Másrészt egy udvarhölgyhöz ezekből legfeljebb r él mehet. Tehát a k darab lovagtól kiinduló élek legalább k udvarhölgyhöz vezetnek, azaz a gráf teljesíti a Hall-feltételt. □

Az előző eredményt a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

3.2.7. Következmény. *Minden r-reguláris páros gráfnak létezik teljes párosítása.*

3.3. Maximális párosítás keresése

Legyen $G(V_1, V_2, E)$ páros gráf, és használjuk a 3.4. ábra jelöléseit. Azt már láttuk, hogy egy C_1 és C_2 közötti alternáló út mentén élcserével az eddiginél 1-gyel nagyobb elemszámú részleges párosítást kapunk. A következő állítás, ami a 3.2.3. lemma kibővítése, biztosítja, hogy ilyen lépések sorozatával mindenképp eljutunk egy maximális párosításhoz.

3.3.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{F}$ részleges párosítás. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

(1) Nem létezik alternáló út C_1 és C_2 között.

(2) $\Gamma(B_1 \cup C_1) = B_2$.

(3) $A_1 \cup B_2$ lefedi G összes élét.

(4) $\mathcal{F}$ maximális.

Bizonyítás.
(1) $\Rightarrow$ (2) $B_1 \cup C_1$-ből sem A_2-be, sem C_2-be nem vezet él, mert akkor létezne C_1 és C_2 között alternáló út.
(2) $\Rightarrow$ (3) Triviális.
(3) $\Rightarrow$ (4) Az $A_1 \cup B_2$ halmaz elemszáma megegyezik $\mathcal{F}$ elemszámával, márpedig egy maximális párosítás nem tartalmazhat több élt, mint ahány csúcsot egy összes élt lefedő halmaz tartalmaz.
(4) $\Rightarrow$ (1) Ha létezik alternáló út C_1 és C_2 között, akkor $\mathcal{F}$ nem maximális, mert az alternáló út mentén élcserével nagyobb elemszámú párosítást kapunk. □

$\mathcal{F}$ tárolásához használjuk az M tömböt:

$$M(k) = \begin{cases} j, & \text{ha } (k,j) \in \mathcal{F}, \\ 0, & \text{ha } \mathcal{F} \text{ nem fedi } k\text{-t}. \end{cases}$$

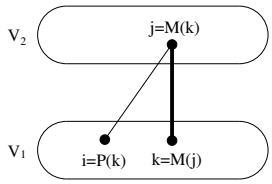
Ezen kívül használni fogjuk még a P tömböt, ahol $k \in V_1$ esetén $P(k) = i$ azt jelenti, hogy C_1-ből a k csúcsba tartó alternáló úton i a k-t megelőző V_1-beli csúcs.

A maximális párosítást meghatározó algoritmus:

1. $\mathcal{F} := \emptyset$, $C_1 := V_1$, $C_2 := V_2$.
2. Alternáló szélességi keresés
   - A keresés a C_1 halmazból indul, tehát kezdetben C_1 összes csúcsát tegyük be a szélességi keresésben használt listába.
   - A keresés egy lépéséhez két él tartozik, egy nem $\mathcal{F}$-beli él, majd az ahhoz kapcsolódó $\mathcal{F}$-beli él, tehát a listában elegendő a V_1-beli csúcsokat tárolni.

- Ha egy lépésben eljutunk $i \in V_1$-ből $j \in V_2$-n keresztül $k \in V_1$-be, akkor $P(k) := i$ (3.5. ábra).
- A keresés befejeződik, ha már bejártuk az összes csúcsot, vagy ha egy $j \in C_2$ csúcshoz jutunk (ahol $M(j) = 0$).
- Ha $j \in C_2$ csúcshoz jutottunk, akkor a P tömb segítségével visszafelé haladva az alternáló úton végrehajtjuk az élcserét $\mathcal{F}$-ben.

3. Ha találtunk alternáló utat, megismételjük a 2. lépést, ha nem találtunk, akkor készen vagyunk, hiszen a 3.3.1. állítás értelmében a jelenlegi párosítás maximális.



3.5. ábra. Alternáló út keresése szélességi kerséssel.

Vizsgáljuk meg az algoritmus futási idejét. Jelölje n a csúcsok, e pedig az élek számát. Egy maximális párosításnak $O(n)$ éle van, tehát az alternáló szélességi keresést $O(n)$-szer kell végrehajtani. Így csúcsmátrixszal adott gráf esetén $O(n^3)$, éllistákkal adott gráf esetén pedig $O(ne)$ az algoritmus lépésszáma. Ha a gráf csúcsmátrixban van tárolva, akkor természetesen elkészíthetjük az éllistákat is $O(n^2)$ időben, és a szélességi keresésben ezt használva összesen $O(n^2 + ne)$ lesz a futási idő, ami $e \geq n$ esetén $O(ne)$, tehát nagyságrendileg nem rosszabb az éllistával adott gráfra végrehajtott algoritmus lépésszámánál.

4. fejezet

A Ramsey-tételkör

4.1. Véges Ramsey-tétel

Neve ellenére a Ramsey-tételkör legnagyobb részét Erdős Pál és Szekeres György dolgozta ki, kivéve a 4.2. fejezetben tárgyalt végtelen gráfokra vonatkozó tételt, amely valóban a névadó, Alfred Ramsey nevéhez fűződik. A Ramsey-tételek egyszerűen fogalmazva azt mondják ki, hogy „teljesen szabálytalan" gráfok nincsenek.

4.1.1. Definíció. *Egy n csúcsú gráfot* **teljes gráfnak** *nevezünk, és K_n-nel jelölünk, ha bármely két csúcsa között van él.*

4.1.2. Tétel (Ramsey). *Bármely $k, l \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $R(k,l) \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $n \geq R(k,l)$ esetén K_n éleit piros és kék színnel tetszőlegesen színezve K_n-nek mindenképpen keletkezik csupa piros élű K_k vagy csupa kék élű K_l részgráfja.*

Jelölje $R^*(k,l)$ a legkisebb létező $R(k,l)$ számot. Triviálisan adódik, hogy minden l esetén $R^*(2,l) = l$, illetve bármely k-ra $R^*(k,2) = k$. Tetszőleges k és l esetén viszont nem ismert $R^*(k,l)$ pontos értéke, sőt meglepő módon már viszonylag kis konkrét k-ra és l-re, például $k = l = 5$-re (!) sem. A 4.1. táblázat a jelenleg ismert $R^*(k,l)$ értékeket tartalmazza.

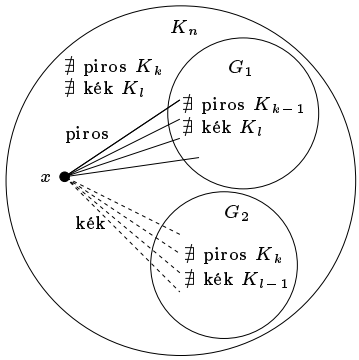
	2	3	4	5	6	7	8	9	...	ℓ	...
2	2	3	4	5	6	7	8	9	...	ℓ	...
3	3	6	9	14	18	23	28	36			
4	4	9	18	25							
5	5	14	25								
6	6	18									
7	7	23									
8	8	28									
9	9	36									
⋮	⋮										
k	k										
⋮	⋮										

4.1. táblázat. $R^*(k,l)$ ismert értékei.

A Ramsey-tétel bizonyításához a következő segédtételt használjuk fel.

4.1.3. Lemma. *Legyen $k \geq 3$ és $l \geq 3$. Ha létezik $R(k-1,l)$ és $R(k,l-1)$, akkor létezik $R(k,l)$ is, és $R^*(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$.*

Bizonyítás. Tekintsünk K_n egy színezését, amely nem tartalmaz sem k csúcsú piros, sem l csúcsú kék teljes gráfot. Megmutatjuk, hogy ekkor $n \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$. A gráf egy tetszőleges csúcsát jelölje x. Vizsgáljuk külön azokat a csúcsokat, melyekbe piros, illetve azokat, melyekbe kék él vezet x-ből. Az általuk feszített teljes részgráfokat jelölje rendre G_1, és G_2 (4.1. ábra). G_1 nem tartalmaz piros K_{k-1}-et, mivel ez x-szel kiegészítve piros



4.1. ábra. Az x csúcs által meghatározott felbontás.

K_k részgráfja lenne G-nek. Másrészt G_1 nyilván nem tartalmaz kék K_l gráfot, tehát G_1-nek legfeljebb $R(k-1,l)-1$ csúcsa van. Hasonlóan G_2 nem tartalmaz piros K_k-t és kék K_{l-1}-et, ezért G_2-nek legfeljebb $R(k,l-1)-1$ csúcsa van. Így valóban

$$n \leq R(k-1,l) - 1 + R(k,l-1) - 1 + 1 = R(k-1,l) + R(k,l-2) - 1. \quad \square$$

A lemma alapján a 4.1 táblázat k-adik sorának l-edik oszlopában lévő $R^*(k,l)$ is létezik, amenyiben a közvetlenül fölötte és a tőle balra lévő elemek létezését már tudjuk. Mivel a táblázat első sorát és első oszlopát ismerjük, ezekből kiindulva a táblázat kitölthető, pontosabban szólva megadható minden k-ra és l-re egy $R(k,l)$ érték, még ha az $R^*(k,l)$ pontos értékét nem is ismerjük. Ezzel a Ramsey-tételt bebizonyítottuk.

Ha a táblázatot az

$$R(k,l) := R(k-1,l) + R(k,l-1)$$

szabály szerint töltjük ki, akkor a táblázat Pascal-háromszögnek felel meg, tehát az 1-nél nagyobb binomiális együtthatók szerepelnek benne. Így felső becslést is kapunk $R^*(k,l)$-re.

4.1.4. Következmény.

$$R^*(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Könnyű belátni azonban, hogy ez a becslés már $k = 3$ és $l = 4$ esetén sem pontos, mert $R^*(3,4) = 9$.

Most vizsgáljuk azt a szimmetrikus speciális esetet, amikor azonos méretű piros illetve kék teljes részgráfot keresünk.

A 4.1.4. következményből az

$$R^*(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} < 4^k$$

felső becslés adódik.

Ha $k-1$ darab $k-1$ csúcsú piros teljes gráfot kék élekkel összekötünk, akkor a keletkező gráfnak nyilván nem lesz k csúcsú egyszínű teljes részgráfja. Ez a konstrukció a

$$(k-1)^2 < R^*(k,k)$$

alsó becslést igazolja. Erdős Pál valószínűségi alapon bizonyított exponenciális alsó korlátot is.

4.1.5. Tétel (Erdős). *Minden $k \geq 3$ esetén*

$$2^{k/2} < R^*(k,k).$$

Bizonyítás. Legyen $n \leq 2^{k/2}$. Nevezzünk jónak egy színezést, ha az tartalmaz egyszínű K_k részgráfot. A tétel igazolásához elegendő belátni, hogy K_n jó színezéseinek száma kisebb, mint összes lehetséges színezésének száma. A K_n gráfban $\binom{n}{k}$ darab K_k található. Ezeket színezhetjük a két szín valamelyikére, majd a fennmaradó $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ él színe tetszőlegesen választható. Így minden jó színezés legalább egyszer előáll, tehát a jó színezések számára a következő felső becslést kapjuk:

$$\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{2 \cdot 2^{\binom{n}{2}}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} \leq \frac{(2^{k/2})^k}{k!} \cdot \frac{2 \cdot 2^{\binom{n}{2}}}{(2^{k/2})^{k-1}} = \frac{2^{k/2+1} \cdot 2^{\binom{n}{2}}}{k!} < 2^{\binom{n}{2}},$$

ha $k \geq 3$. □

A tételre konstruktív bizonyítást a mai napig nem találtak, a legjobb ismert konstrukciók nagyságrendileg k^p csúcsot tartalmaznak tetszőleges p egész számra.

Az eddigiek alapján tehát

$$\sqrt{2} < \sqrt[k]{R^*(k,k)} < 4,$$

a következő sejtés azonban megoldatlan.

4.1.6. Sejtés. *Létezik*

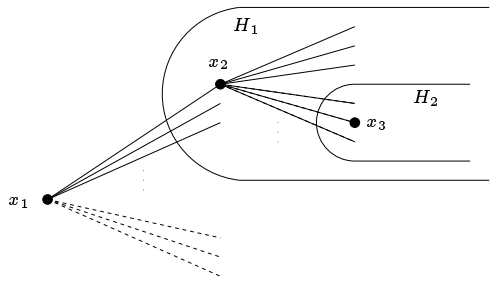
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{R^*(k,k)}.$$

4.2. Végtelen Ramsey-tétel

Jelölje K_∞ a végtelen sok csúcsból álló teljes gráfot.

4.2.1. Tétel (Ramsey). *K_∞ éleit piros és kék színnel tetszőlegesen színezve keletkezik egyszínű végtelen teljes részgráf.*

Bizonyítás. A gráf egy csúcsát jelöljük x_1-gyel. Az x_1-ből kiinduló piros, illetve kék élek száma közül legalább az egyik végtelen. Tegyük fel például, hogy végtelen sok piros él indul x_1-ből, és jelölje H_1 azon csúcsok végtelen halmazát, amelyekbe ezek a piros élek vezetnek. A H_1 halmaz tetszőlegesen választott x_2 elemére is igaz, hogy végtelen sok egyszínű él indul belőle H_1-beli csúcsokhoz. Jelölje ezen csúcsok halmazát H_2 (4.2. ábra). Az eljárást



4.2. ábra. Az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ csúcsok kiválasztása.

folytatva $x_1, x_2, x_3, \ldots$ végtelen pontsorozatot és $H_1, H_2, H_3, \ldots$ végtelen halmazsorozatot kapunk. A pontok választásának módja miatt bármely x_i-re igaz, hogy a sorozatban utána következő pontokkal azonos színű él köti össze. Az x_i csúcs kapjon p címkét, ha ezek az élek pirosak, k címkét, ha kékek. A p és k címkék közül legalább az egyik végtelen sokszor fordul elő, ezért a végtelen sokszor szereplő címkének megfelelő csúcsok egyszínű végtelen teljes részgráfot határoznak meg. □

4.3. A véges és végtelen Ramsey-tételek kapcsolata

Az 1.3. fejezetben bizonyított Kőnig-lemma segítségével megmutatjuk, hogy a véges Ramsey-tétel következménye a végtelen esetnek.

4.3.1. Állítás. *Ha a végtelen Ramsey-tétel igaz, akkor a véges Ramsey-tétel is.*

Bizonyítás. A bizonyítás során (kivételesen) K_n jelentse mindig az $\{1, 2, \ldots, n\}$ csúcshalmaz által feszített teljes gráfot.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a végtelen Ramsey-tétel igaz, de a véges nem. Ekkor léteznek olyan k és l számok, melyekre minden n természetes szám esetén K_n színezhető piros teljes k-as és kék teljes l-es keletkezése nélkül.

Definiálunk egy, a Kőnig-lemma (1.3.1. lemma) feltételeit teljesítő gráfot. Minden n esetén jelölje A_n a K_n gráf ilyen színezéseinek halmazát. Feltevésünk miatt egyik A_n sem üres, ugyanakkor mindegyik véges, mivel K_n-nek csak véges sok különböző színezése létezik. Azt mondjuk, hogy a K_{n+1} gráf c' színezése kiterjesztése K_n egy c színezésének, ha K_n élei ugyanolyan színűek c'-ben, mint c-ben. Egy $c \in A_n$ és egy $c' \in A_{n+1}$ színezést kössünk össze, ha c' kiterjesztése c-nek. A $c' \in A_{n+1}$ színezésből hagyjunk el egy tetszőleges csúcsot. A K_n gráf így keletkező c színezése eleme A_n-nek, ugyanis ha c' nem tartalmaz sem piros K_k, sem kék K_l részgráfot, akkor c sem. Másrészt c' kiterjesztése c-nek, tehát a két színezés össze van kötve. Ez azt jelenti, hogy A_{n+1} minden eleméből vezet él A_n-be, tehát az általunk definiált végtelen gráf kielégíti az 1.3.1. lemma feltételeit, így tartalmaz végtelen utat.

Ez a végtelen út kiterjesztések végtelen sorozatát jelenti, ami K_∞ olyan színezését határozza meg, amelyben nem létezik sem piros K_k, sem kék K_l részgráf. (Ha létezne például piros K_k, akkor már az első olyan K_n-ben is létezne, ami a piros rész minden csúcsát tartalmazza, de ez lehetetlen.) Ekkor természetesen egyszínű végtelen teljes részgráf sem létezik, ami ellentmond a végtelen Ramsey-tételnek. □

4.4. Ramsey-tételek halmazrendszerekre

Az eddigiekben a gráfok éleit csúcspárokat összekötő vonalaknak tekintettük. A gráfélek viszont egyértelműen megfeleltethetők kételemű csúcshalmazoknak is, melyeket az élek végpontjai alkotnak. A csúcsok halmazát alaphalmaznak tekintve a gráfok tehát ennek kételemű részhalmazaiból álló halmazrendszerek. A gráfok általánosításaként most legyen r egy tetszőleges természetes szám, és tekintsük az alaphalmaz r-elemű részhalmazait, röviden r-eseit. Ebben a fejezetben a gráfok Ramsey-tételeinek halmazrendszerekre vonatkozó megfelelőivel foglalkozunk először végtelen, majd véges alaphalmaz esetén.

4.4.1. Tétel (Ramsey). *Legyen V_0 végtelen halmaz, r pedig egy természetes szám. A V_0 halmaz r elemű részhalmazait két színnel tetszőlegesen színezve létezik $A \subseteq V_0$ végtelen halmaz, melynek minden r-ese azonos színű.*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk r szerint. A tétel $r = 1$ esetben triviális, $r = 2$-re pedig pontosan a végtelen gráfokra vonatkozó Ramsey-tételnek felel meg.

Most tegyük fel, hogy valamely $r - 1$ esetén a tétel igaz, és tekintsük a V_0 halmaz r-eseinek egy színezését. Legyen x_0 tetszőleges eleme V_0-nak. Definiáljuk a következő színezést a $V_0 \setminus \{x_0\}$ halmaz $(r-1)$-esein:

- $\{y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\} \subset V_0 \setminus \{x_0\}$ legyen **piros**, ha $\{x_0, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\}$ **piros**.
- $\{y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\} \subset V_0 \setminus \{x_0\}$ legyen **kék**, ha $\{x_0, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\}$ **kék**.

Ekkor az indukciós feltétel miatt létezik egy $V_1 \subseteq V_0 \setminus \{x_0\}$ végtelen halmaz, melynek minden $(r-1)$-ese azonos színű, például piros. Ezek az $(r-1)$-esek tehát x_0-lal kiegészítve szintén pirosak voltak az eredeti színezésben.

Most válasszunk egy $x_1 \in V_1$-et, és $V_1 \setminus \{x_1\}$ $(r-1)$-esein vezessünk be új színezést:

- $\{y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\} \subset V_1 \setminus \{x_1\}$ legyen **piros**, ha $\{x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\}$ **piros**.
- $\{y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\} \subset V_1 \setminus \{x_1\}$ legyen **kék**, ha $\{x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\}$ **kék**.

Ekkor létezik $V_2 \subseteq V_1 \setminus \{x_1\}$ végtelen halmaz is, melynek $(r-1)$-esei x_1-gyel kiegészítve azonos színűek, például kékek.

Ezt az eljárást folytatva egy $x_0, x_1, x_2, \ldots$ és egy $V_0, V_1, V_2, \ldots$ végtelen sorozatot kapunk. A V_i halmazok választása miatt minden n esetén az

$$\Big\{ \{x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\} \mid \{y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}\} \subset V_{n+1} \Big\}$$

halmazrendszer minden eleme azonos színű (persze ez a szín függ n-től). Ezért bármely $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ indexek esetén $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}\}$ színét x_{i_1} egyértelműen meghatározza, ugyanis az $x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ elemek benne vannak a V_{i_1+1} halmazban.

Minden x_n-hez rendeljünk p vagy k címkét attól függően, hogy V_{n+1} $(r-1)$-eseit x_n-nel kiegészítve piros vagy kék r-est kapunk. A p és k címkék közül legalább az egyik végtelen sokszor fordul elő, ezért a végtelen sokszor szereplő címkének megfelelő elemek olyan végtelen halmazt határoznak meg, melynek minden r elemű részhalmaza azonos színű. □

4.4.2. Tétel (Ramsey). *Bármely $r, k, l \in \mathbb{N}$ esetén létezik $R^r(k,l) \in \mathbb{N}$ szám úgy, hogy minden $n \geq R^r(k,l)$ esetén egy n elemű A halmaz r-eseit piros és kék színnel tetszőlegesen színezve létezik k elemű $B \subseteq A$ halmaz, melynek minden r-ese piros, vagy létezik l elemű $C \subseteq A$ halmaz, melynek minden r-ese kék.*

Bizonyítás. A Kőnig-lemma segítségével a 4.3.1. állítás bizonyításához hasonlóan belátható, hogy a végtelen halmazrendszerekre vonatkozó Ramsey-tételből következik a véges halmazrendszerekre vonatkozó tétel. □

5. fejezet

Konvex sokszögek

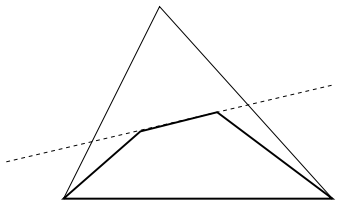
5.1. Nagy konvex sokszögek létezése

5.1.1. Definíció. *Egy síkbeli ponthalmaz* **általános helyzetű**, *ha semelyik három pontja sem illeszkedik egy egyenesre.*

Legyen adott egy $t \geq 3$ természetes szám. Célunk annak a vizsgálata, hogy hány elemű általános helyzetű síkbeli ponthalmazból választható ki minden esetben t pont úgy, hogy azok t csúcsú konvex sokszöget határozzanak meg. A $t = 3$ eset triviális, $t = 4$-re Klein Eszter mutatta meg először, hogy öt pont elegendő.

5.1.2. Állítás (Klein). *Öt általános helyzetű síkbeli pontból mindig kiválasztható konvex négyszög.*

Bizonyítás. Amennyiben az öt pont konvex burka négy- vagy ötszög, akkor készen vagyunk. Ha a konvex burok háromszög, akkor az 5.1. ábra szerint a belső két pont a konvex burok háromszögének azzal a két csúcsával alkot konvex négyszöget, amelyek által meghatározott oldalt nem metszi át a belső két pontra illeszkedő egyenes. □

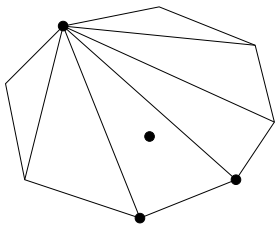


5.1. ábra. Öt pont meghatároz egy konvex négyszöget.

A fejezet hátralévő részének eredményei Erdős és Szekeres nevéhez fűződnek. Ők bizonyították, hogy tetszőleges t esetén meg tudunk adni olyan $K(t)$ számot, hogy bármely $K(t)$ elemű, általános helyzetű síkbeli ponthalmaz tartalmaz t konvex helyzetű pontot. Ennek belátásához szükségünk lesz a következő állításra.

5.1.3. Állítás. *A síkon n általános helyzetű pont akkor és csak akkor konvex helyzetű, ha bármely négy pontja konvex helyzetű.*

Bizonyítás. A „csak akkor" rész triviális. A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy egy ponthalmazban bármely négy pont konvex, de együtt nem alkotnak konvex sokszöget. Ekkor a pontok konvex burkán belül létezik legalább egy pont. A konvex burkot osszuk háromszögekre egy pontjából kiinduló átlókkal. Ekkor a belső pont beleesik ezen háromszögek valamelyikébe (5.2. ábra), tehát a háromszög csúcsai és ez a pont nem alkotnak konvex négyszöget. □



5.2. ábra. Létezik négy nem konvex helyezű pont.

5.1.4. Tétel (Erdős-Szekeres). *Bármely $t \geq 3$ esetén létezik olyan $K(t)$ szám, hogy minden $K(t)$ elemű, általános helyzetű síkbeli ponthalmazból kiválasztható t konvex helyzetű pont.*

Bizonyítás. Válasszuk $K(t)$-nek a 4.4.2. Ramsey-tételből adódó $R^4(t,5)$ számot. Egy $K(t)$ elemű ponthalmaz négy elemű részhalmazait színezzük két színnel: a konvex állásúak legyenek pirosak, a konkáv állásúak pedig kékek. A tétel szerint vagy létezik t pont, amelynek minden négyese konvex, vagy létezik 5 pont, amelyből bármely négy konkáv. Az utóbbi ellentmond az 5.1.2. állításnak, tehát az első eset áll fenn. Ekkor viszont az 5.1.3. állítás miatt a t pont konvex helyeztű. □

Jelölje $K^*(t)$ a legkisebb $K(t)$ számot. A továbbiakban $K^*(t)$ értékének meghatározásával foglalkozunk.

5.2. Konvex és konkáv ívek

Amennyiben a ponthalmazban előfordulnak azonos x koordinátájú pontok, akkor létezik egy olyan szög, amellyel a ponthalmazt elforgatva már nem esnek pontok egymás alá. Az elforgatás a pontok konvex helyzetét nem befolyásolja, tehát a probléma leszűkítése nélkül feltehető, hogy minden pont x koordinátája különböző.

5.2.1. Definíció. *Egy x koordináta szerint rendezett véges pontsorozatot* **konvex (konkáv) ívnek** *nevezünk, ha minden pontpárjára a rajtuk áthaladó egyenes alatt (felett) helyezkedik el a pontsorozatban közéjük eső összes többi pont.*

5.2.2. Állítás. *Bármely $k, l \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $F(k,l)$ szám, hogy minden $F(k,l)$ elemű, általános helyzetű síkbeli ponthalmazból, ahol a pontok x koordinátái különbözők, kiválasztható k csúcsú konvex vagy l csúcsú konkáv ív.*

Bizonyítás. Válasszuk $F(k,l)$-nek a 4.4.2. Ramsey-tételből adódó $R^3(k,l)$ számot. Egy $F(k,l)$ elemű ponthalmaz hármasai közül színezzük pirosra azokat, amelyek pontjai x koordináta szerint rendezve konvex, kékre pedig azokat, amelyek konkáv ívet alkotnak. A tétel

szerint vagy létezik k pont, amelynek minden ponthármasa piros, vagy létezik l pont, amelyből minden hármas kék. Egy ponthalmaz x koordináta szerint rendezve akkor és csak akkor határoz meg konvex (konkáv) ívet, ha minden ponthármasa konvex (konkáv) ív. Ez azt jelenti, hogy k csúcsú konvex, vagy l csúcsú konkáv ívet kaptunk. □

Természetesen egy konvex vagy konkáv ív egyben konvex sokszög is, tehát $K(t)$-nek $F(t,t)$-t választva az 5.1.4. tétel másik bizonyítását kapjuk.

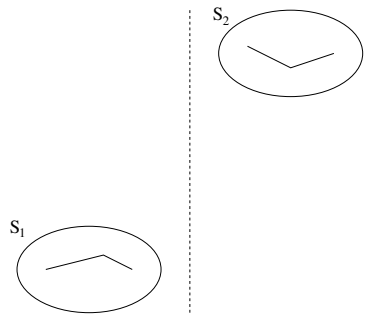
Jelölje $F^*(k,l)$ a legkisebb $F(k,l)$ számot. A következő két tétel segítségével meghatározzuk $F^*(k,l)$ pontos értékét.

5.2.3. Tétel.

$$F^*(k,l) \geq \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Bizonyítás. Ha $k = 2$ vagy $l = 2$, akkor a binomiális együtthatóknál szokásos $\binom{0}{0} = 1$ konvenció szerint az állítás triviális. A $k,l \geq 3$ esetben konstruálunk $\binom{k+l-4}{k-2}$ olyan pontot, hogy azok nem tartalmaznak sem k csúcsú konvex, sem l csúcsú konkáv ívet. Teljes indukciót alkalmazunk $k+l$ szerint. Ha $k = 3$, akkor egy $l-1$ csúcsú konkáv ív, ha pedig $l = 3$, akkor egy $k-1$ csúcsú konvex ív megfelel a követelményeknek. Most legyen $k,l \geq 4$, és tegyük fel, hogy minden k' és l' esetén, ahol $k'+l' < k+l$ már találtunk $\binom{k'+l'-4}{k'-2}$ pontból álló megfelelő konstrukciót. Ezek közül jelölje S_1 a $k' = k-1$, $l' = l$, S_2 pedig a $k' = k$, $l' = l-1$ értékeknek megfelelő esetet.

Helyezzük el S_1 és S_2 kellően „lapos" példányait a síkon úgy, hogy S_1 minden pontja balra essen S_2 minden pontjától. A „lapos" itt úgy értendő, hogy minden olyan egyenes, ami S_1 két pontjára illeszkedik, S_2 alatt halad, illetve minden olyan egyenes, ami S_2 két pontjára illeszkedik, S_1 felett halad (5.3. ábra).



5.3. ábra. A $k = l = 4$ eset.

Belátjuk, hogy az így keletkező $S_1 \cup S_2$,

$$\binom{k+l-5}{k-3} + \binom{k+l-5}{k-2} = \binom{k+l-4}{k-2}$$

pontból álló konstrukció nem tartalmaz sem k csúcsú konvex, sem l csúcsú konkáv ívet. Az S_1 és S_2 halmazok elhelyezkedése miatt $S_1 \cup S_2$ minden olyan konvex íve, amiben van S_1-beli és S_2-beli pont is, nem tartalmazhat 1-nél több pontot S_2-ből. Így ennek a konvex ívnek a hossza legfeljebb $k-2+1 = k-1$. Másrészt ha egy konvex ívet teljes egészében tartalmaz valamelyik rész, akkor nyilván nem lehet $k-1$-nél több pontja. Hasonlóan, $S_1 \cup S_2$ minden olyan konkáv íve, amiben van S_1-beli és S_2-beli pont is, S_1-ből nem tartalmazhat 1-nél több

pontot. Ezért ennek a konkáv ívnek legfeljebb $l-2+1=l-1$ csúcsa van. Másrészt ha a konkáv ívet csak az egyik részből választjuk, akkor nem lehet $l-1$-nél több pontja. □

A felső becsléshez szükségünk lesz egy lemmára, ami számozott csúcshalmazú, súlyozott élű gráfok növő és csökkenő láncaira vonatkozik. Jelölje $a_1, a_2, \ldots, a_N$ a K_n gráf csúcsait. Minden $i<j$ esetén súlyozzuk az (a_i, a_j) élt egy tetszőleges $w(a_i, a_j)$ valós számmal.

5.2.4. Definíció. *Az $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ indexek esetén az $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_k}$ út* **növő lánc**, *ha az út mentén az élek súlyai szigorúan monoton növő sorozatot alkotnak.*

5.2.5. Definíció. *Az $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ indexek esetén az $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_k}$ út* **csökkenő lánc**, *ha az út mentén az élek súlyai monoton csökkenő sorozatot alkotnak.*

5.2.6. Lemma. *Ha $N \geq \binom{k+l-2}{k-1} + 1$, akkor K_N éleinek tetszőleges súlyozása tartalmaz k élű növő vagy l élű csökkenő láncot.*

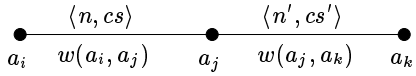
Bizonyítás. Minden e élhez rendeljük hozzá az $\langle n(e), cs(e)\rangle$ számpárt, ahol $n(e)$ és $cs(e)$ az e-vel kezdődő növő, illetve csökkenő láncok maximális hosszát jelenti. Jelölje H_i azon számpárok halmazát, amelyek az a_i-ből induló élekhez tartoznak, azaz

$$H_i := \Big\{ \langle n(e), cs(e)\rangle \mid i<j \text{ és } e=(a_i,a_j) \Big\}.$$

Azt mondjuk, hogy $\langle \alpha, \beta\rangle$ jobb, mint $\langle \gamma, \delta\rangle$, ha $\alpha \geq \gamma$, $\beta \geq \delta$ és a két egyenlőtlenség közül legalább az egyik szigorú. Legyen

$$H_i{}^+ := \Big\{ \langle n, cs\rangle \in H_i \mid \langle n, cs\rangle\text{-nél nincs jobb } H_i\text{-ben} \Big\}.$$

Belátjuk, hogy $i \neq j$ esetén $H_i{}^+ \neq H_j{}^+$. Legyen például $i<j$, és az (a_i, a_j) élhez tartozzon $\langle n, cs\rangle$. Eszerint $H_i{}^+$-ban van legalább ilyen jó számpár. Elegendő megmutatnunk, hogy $H_j{}^+$ nem tartalmaz olyan számpárt, ami legalább olyan jó, mint $\langle n, cs\rangle$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\langle n', cs'\rangle \in H_j{}^+$, ahol $n' \geq n$ és $cs' \geq cs$. Tartozzon az $\langle n', cs'\rangle$ számpár például az (a_j, a_k) élhez (5.4. ábra). Ha $w(a_i,a_j) < w(a_j,a_k)$, akkor $n \geq n'+1 \geq n+1$,



5.4. ábra. $H_i{}^+ \neq H_j{}^+$.

ami ellentmondás. Ha viszont $w(a_i,a_j) \geq w(a_j,a_k)$, akkor $cs \geq cs'+1 \geq cs+1$, ami szintén ellentmondás.

A lemma bizonyításához elég megmutatnunk, hogy ha K_N nem tartalmaz sem k élű növő, sem l élű csökkenő láncot, akkor legfeljebb $\binom{k+l-2}{k-1}$ különböző $H_i{}^+$ halmaz van, ugyanis ebből már következik, hogy $N \leq \binom{k+l-2}{k-1}$. Jelölje $n_1 < n_2 < \ldots < n_t$ a $H_i{}^+$-ben szereplő számpárok első tagjait, $cs_1 < cs_2 < \ldots < cs_t$ pedig a második tagjait. Ekkor $H_i{}^+$ csak a következő számpárokból állhat:

$$H_i{}^+ = \Big\{ \langle n_1, cs_t\rangle, \langle n_2, cs_{t-1}\rangle, \ldots, \langle n_{t-1}, cs_2\rangle, \langle n_t, cs_1\rangle \Big\}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\{n_1, n_2, \ldots n_t\}$ és a $\{cs_1, cs_2, \ldots cs_t\}$ halmazok egyértelműen meghatározzák a $H_i{}^+$ halmazt. Feltevésünk miatt $t \leq k-1$ és $t \leq l-1$, tehát a különböző $H_i{}^+$ halmazok száma legfeljebb

$$\sum_{t=0}^{l-1} \binom{k-1}{t}\binom{l-1}{t} = \sum_{t=0}^{l-1} \binom{k-1}{k-1-t}\binom{l-1}{t} = \binom{k+l-2}{k-1}. \quad \square$$

5.2.7. Tétel.

$$F^*(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Bizonyítás. Legyen $N = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$, és vegyük a különböző x koordinátájú, általános helyzetű $a_1, a_2, \ldots, a_N$ pontokat a síkon x koordináta szerint növekvő sorrendben. Tekintsük ezeket a pontokat K_N csúcsainak, és minden (a_i, a_j) élt súlyozzunk az $\overline{a_i a_j}$ egyenes meredekségével. Az 5.2.6. lemma alapján létezik $k-1$ élű növő vagy $l-1$ élű csökkenő lánc. Egy $k-1$ élű növő lánc k csúcsú konvex ívnek, egy $l-1$ élű csökkenő lánc pedig l csúcsú konkáv ívnek felel meg. Tehát a ponthalmaz tartalmaz k csúcsú konvex vagy l csúcsú konkáv ívet. □

Annak ellenére, hogy a csökkenő lánc definíciója megenged azonos súlyú egymást követő éleket, vegyük észre, hogy itt a pontok általános helyzete kizárja ezt a lehetőséget.

Az 5.2.3. és 5.2.7. tételek alapján $F^*(k,l)$ pontos értékét is ismerjük.

5.2.8. Tétel (Erdős-Szekeres).

$$F^*(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

5.3. Nagy konvex sokszögek létezéséhez szükséges pontok száma

Már korábban megjegyeztük, hogy $K(t)$-nek választhatjuk $F^*(t,t)$ értékét. Innen adódik a következő felső becslés $K^*(t)$-re.

5.3.1. Következmény.

$$K^*(t) \leq \binom{2t-4}{t-2} + 1.$$

Az 5.2.3. tétel bizonyításához használt konstrukció segítségével mutatunk alsó korlátot is.

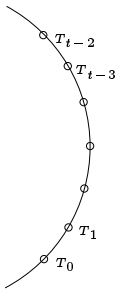
5.3.2. Tétel (Erdős-Szekeres).

$$K^*(t) \geq 2^{t-2} + 1.$$

Bizonyítás. Megadunk 2^{t-2} pontot úgy, hogy azok nem tartalmaznak t csúcsú konvex sokszöget. Minden $0 \leq i \leq t-2$ esetén T_i legyen $\binom{t-2}{i}$ elemű általános helyzetű ponthalmaz, ami nem tartalmaz sem $i+2$ csúcsú konvex, sem $t-i$ csúcsú konkáv ívet. Az 5.2.3. tétel értelmében léteznek ilyen T_i ponthalmazok. Megfelelő transzformációkkal elérhető, hogy minden T_i elég „kicsi" és elég „lapos" legyen ahhoz, hogy a T_i-ket az 5.5. ábra szerint egy körív mentén elhelyezve minden T_i-re teljesüljön a következő két feltétel:

(1) Létezik olyan egyenes, amelynek T_i az egyik, az összes többi T_j pedig a másik oldalára esik.

(2) T_i bármely két pontját összekötő egyenesre igaz, hogy $T_0, \ldots, T_{i-1}$ pontjai az egyenes alá, $T_{i+1}, \ldots, T_{t-2}$ pontjai az egyenes fölé esnek.

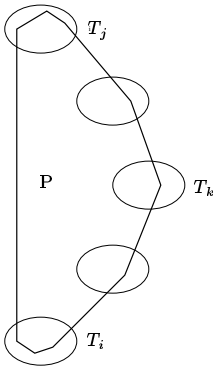


5.5. ábra. A T_i ponthalmazok elhelyezése.

A T_i halmazok unióját jelöljük T-vel. Ekkor

$$|T| = \sum_{i=0}^{t-2} |T_i| = \sum_{i=0}^{t-2} \binom{t-2}{i} = 2^{t-2}.$$

Belátjuk, hogy bármely T-beli P konvex poligon legfeljebb $t-1$ csúcsú. Legyen T_i a legkisebb, T_j a legnagyobb indexű rész, amelyben található P-nek legalább egy csúcsa. Az (1) feltétel miatt a P legkisebb x koordinátájú T_i-beli csúcsától az óramutató járásával ellentétes körüljárás szerint véve P csúcsait, az őket tartalmazó T_l halmazok növekvő index szerint következnek (5.6. ábra). Másrészt a (2) feltétel alapján minden $i < l < j$-re P-ben legfeljebb



5.6. ábra. A P konvex sokszög csúcsai.

egy T_l-beli pont található. Mivel P-nek T_i-be eső része egy konvex, T_j-be eső része pedig egy konkáv ív, tehát T_i maximum $i+1$, T_j pedig maximum $t-j-1$ pontját tartalmazza P-nek, ezért

$$|P| \leq (i+1) + (t-j-1) + (j-i-1) = t-1. \quad \square$$

Az 5.1.2. állítás szerint $K^*(4) = 5$. Ismert még, hogy $K^*(5) = 9$, tehát $t \leq 5$-re az alsó becslés éles. Nem ismert azonban $K^*(t)$ pontos értéke $t \geq 6$ esetén (az 5.3.1. következmény 4^t nagyságrendű felső becslése már $t = 5$-re is igen messze esik a tényleges értéktől). Erdős Pál és Szekeres György azt sejtette, hogy az 5.3.2. tétel alsó korlátja a pontos érték:

5.3.3. Sejtés.

$$K^*(t) = 2^{t-2} + 1.$$

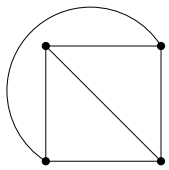
6. fejezet

Síkgráfok

6.1. Síkgráfok tulajdonságai

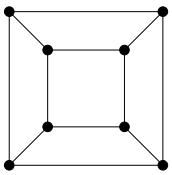
6.1.1. Definíció. *Egy gráfot* **síkbarajzolható gráfnak**, *vagy röviden síkgráfnak nevezünk, ha csúcsainak megfeleltethetők a sík különböző pontjai, éleinek pedig a megfelelő pontpárokat összekötő folytonos görbék a síkban, amelyek nem metszik egymást.*

A megfeleltetést a gráf síkbarajzolásának vagy *síkbarajzolt gráfnak* hívjuk. A 6.1. ábrán például K_4 síkbarajzolása látható.



6.1. ábra. A K_4 síkbarajzolása.

Bármely konvex poliéder élhálózata síkgráf, ugyanis a poliéderen kívül, tetszőleges lapjához elég közel megadható olyan pont, amelyből az élhálózatot a lap síkjára vetítve az élek nem metszik egymást. A kocka élhálózatának síkbarajzolt gráfját a 6.2. ábra szemlélteti.



6.2. ábra. A kocka élhálózatának síkbarajzolása.

Síkbarajzolt gráf lapjai az éleknek megfelelő görbék által határolt tartományok, beleértve a külső, nem korlátos tartományt is. Jelölje c a csúcsok, e az élek, l pedig a lapok számát. Ezek kapcsolatát a következő Euler-összefüggés jellemzi.

6.1.2. Tétel (Euler). *Összefüggő síkbarajzolt gráfban* $c + l = e + 2$.

Bizonyítás. Képzeljük el, hogy a lapok országoknak felelnek meg, kivéve a külső lapot, ami a tenger. Az éleket tekintsük gátaknak, amelyek útját állják a víznek. Aszály esetén vizet kell juttatni a tengerből az összes országba a lehető legkevesebb gát megnyitásával. Nyilván át tudjuk vágni a gátakat olyan sorrendben, hogy minden lépésben egy ország jusson vízhez, tehát pontosan $l-1$ gát átvágása szükséges. Ezen élek elhagyása után a gráf körmentessé válik, ugyanis ha létezne kör, akkor a körön belüli országok el lennének zárva a tengertől. Másrészt a gráf összefüggő marad, hiszen nem vágunk át olyan gátat, melynek mindkét oldalán már vízhez jutott ország fekszik. Tehát a fennmaradó gráf fa, azaz éleinek száma $c-1$, így az eredeti gráfnak $e=(c-1)+(l-1)$ éle volt, amiből a $c+l=e+2$ egyenlőség adódik. □

A tételből következik, hogy adott gráf minden lehetséges síkbarajzolása ugyanannyi lapot tartalmaz. A továbbiakban síkgráfon értsünk mindig összefüggő síkgráfot.

6.1.3. Következmény. *Ha a síkbarajzolt gráf minden lapját, beleértve a külsőt is, pontosan három él határolja, akkor* $e=3c-6$.

Bizonyítás. A feltétel miatt a gráf lapjainak száma $l=2e/3$, amit az Euler-összefüggésbe helyettesítve az $e=3c-6$ egyenlőséget kapjuk. □

6.1.4. Definíció. *Egy gráf* **egyszerű**, *ha nem tartalmaz olyan élt, melynek két végpontja azonos, és minden csúcspárt legfeljebb egy él köt össze, más szóval nincsenek a gráfban hurokélek és többszörös élek.*

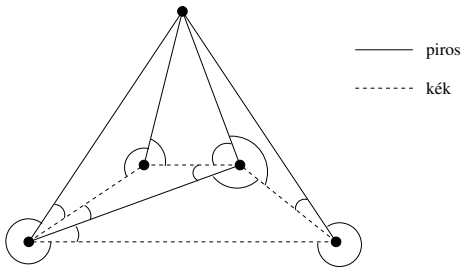
6.1.5. Következmény. *Egyszerű síkgráfban* $e\leq 3c-6$, *és* $l\leq 2c-4$.

Bizonyítás. Egyszerű síkbarajzolt gráf esetén élek behúzásával elérhető, hogy minden lapot három él határoljon. Ekkor a 6.1.3. következmény miatt $e=3c-6$, tehát az eredeti gráfban valóban legfeljebb ennyi él található. Ezt felhasználva az Euler-összefüggésből $l=e-c+2\leq 3c-6-c+2=2c-4$ adódik. □

A síkgráf tehát ritka gráf, azaz nagyságrendileg nem tartalmaz több élt, mint ahány csúcsa van.

6.1.6. Lemma. *Egyszerű síkbarajzolt gráf éleit két színnel színezve mindenképp találunk olyan csúcsot, amelyre illeszkedő élek elhelyezkedés szerinti ciklikus sorrendjében legfeljebb két színváltás fordul elő.*

Bizonyítás. A 6.3. ábrán a körívek a színváltásokhoz tartozó „szögtartományokat" jelölik. Ha a síkbarajzolt gráfnak van olyan lapja, amit háromnál több él határol, akkor húzzunk



6.3. ábra. Színváltások szögtartományai.

be éleket, és színezzük őket tetszőleges színnel, amíg minden lap három él által határolt tartomány nem lesz. Az élek behúzásával semelyik csúcsnál sem csökkent a színváltások száma, tehát elegendő az új gráfra igazolnunk az állítás helyességét.

Egy lap három csúcsa közül legfeljebb kettőnél lehet az adott lapon belülre eső színváltás. Másrészt a lapok száma legfeljebb $2c-4$, ezért a színváltások száma összesen nem lehet több $4c-8$-nál. Ebből következik, hogy van olyan x csúcs, amelyhez 4-nél kevesebb színváltás tartozik. Mivel minden csúcsnál páros sok színváltás fordul elő, az x-hez tartozó színváltások száma legfeljebb kettő. □

Ez a lemma a konvex poliéderek merevségéhez kapcsolódó következő tételnek itt nem tárgyalt bizonyításában kerül felhasználásra.

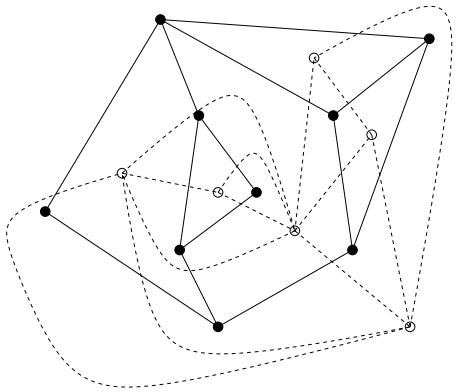
6.1.7. Tétel (Cauchy). *Adott lapokat adott élek mentén összeillesztve az előálló konvex poliéder egyértelmű.*

6.2. Térképek színezése

Az Euler-tétel bizonyításához hasonlóan tekintsük a síkbarajzolt gráf lapjait (beleértve a külső lapot is) országoknak. Ebben a felfogásban a síkbarajzolt gráf egy térkép. Térképek jó színezésén a lapok olyan színezését értjük, ahol közös határszakasszal rendelkező országok különböző színűek. A négy-szín sejtés, tehát az, hogy négy színnel minden térkép jól színezhető, sokáig megoldatlan probléma volt.

6.2.1. Tétel. *Minden térkép jól színezhető négy színnel.*

A tétel ismert bizonyítása igen bolnyolult, ezért itt nem tárgyaljuk. A lapok színezésének problémája átfogalmazható csúcsok színezésére, ehhez szükségünk van a *duális gráf* fogalmára. Jelöljünk ki minden ország belsejében egy pontot, mint az ország fővárosát. Építsünk úgy autópályákat a szomszédos országok fővárosai között, hogy a két ország határát alkotó élek mindegyikén pontosan egy autópálya haladjon keresztül (6.4. ábra). A fővárosok és



6.4. ábra. Síkbarajzolt gráf és duálisa.

autópályák által meghatározott gráfot nevezzük az eredeti síkbarajzolt gráf duálisának. Nyilván az autópályák megépíthetők úgy, hogy ne messék egymást, tehát a duális gráf is síkgráf. Ha a G gráf G^* duális gráfjában a csúcsok, élek és lapok számát rendre c^*, e^* és l^* jelöli,

akkor $c^* = l$, $e^* = e$ és $l^* = c$. Megjegyezzük, hogy ugyanannak a síkgráfnak két különböző síkbarajzolásához tartozhatnak egymással nem izomorf duális gráfok, ugyanis az egyes lapokat határoló élek számai, azaz a duális gráfban a fokszámok függnek a síkbarajzolástól.

A térképek jó színezése a duális gráfra nézve a csúcsoknak olyan színezését jelenti, amelyben a szomszédos csúcsok különböző színűek. Tehát a térképszínezéssel ekvivalens probléma a síkgráf csúcsainak színezése.

6.2.2. Lemma. *Egyszerű síkgráfnak létezik legfeljebb ötödfokú csúcsa.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekte, hogy a gráf minden csúcsának foka legalább 6. Ekkor az élek száma legalább $6c/2 = 3c$, ami ellentmond a 6.1.5. következménynek. □

A lemma segítségével bizonyítjuk a hat-szín tételt, amit most a csúcsok színezésére mondunk ki.

6.2.3. Tétel. *Hurokélt nem tartalmazó síkgráf csúcsai jól színezhetők hat színnel.*

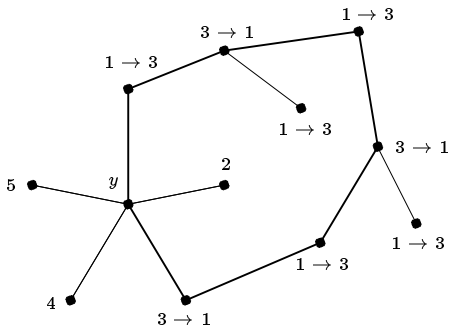
Bizonyítás. Egyszerű gráfokra csúcsszám szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy hat színnel színezhetők. Ha a gráf tartalmaz többszörös élt, ezeket egyszeres élekkel helyettesítve keletkező egyszerű gráf jó színezéséből könnyen adódik ugyanannyi színt használó jó színezés az eredeti gráfban is.

Egy csúcsú gráf színezhető egy színnel. Most tegyük fel, hogy minden $c-1$ csúcsból álló egyszerű gráf jól színezhető hat színnel. A 6.2.2. lemma alapján a c csúcsú G egyszerű síkgráfnak létezik legfeljebb ötödfokú csúcsa. Jelöljük ezt x-szel. Az indukciós feltevés miatt $G - \{x\}$ színezhető hat színnel. Az x szomszédai között legfeljebb öt szín fordul elő, tehát a fennmaradó hatodik színre festve x-et G-nek jó színezését kapjuk. □

6.2.4. Tétel. *Síkgráf csúcsai jól színezhetők öt színnel.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításhoz hasonlóan itt is elegendő egyszerű síkgráfokra bizonyítanunk a tétel helyességét. Alkalmazzunk most is c szerinti teljes indukciót. Ha a c csúcsú G egyszerű síkgráfnak létezik legfeljebb negyedfokú x csúcsa, akkor $G - \{x\}$-et öt színnel színezve lesz legalább egy szín, ami nem szerepel x szomszédai között.

Ha G-nek nincs legfeljebb negyedfokú csúcsa, akkor van olyan y csúcsa, aminek foka pontosan öt. Színezzük $G - \{y\}$-t öt színnel. Ha y szomszédai között nem szerepel minden szín, akkor választható alkalmas szín y-nak. Most tegyük fel, hogy y szomszédai mind különböző színűek. A 6.5. ábra szerint a szomszédos csúcsok színeit jelöljék az $1, 2, 3, 4, 5$ számok.



6.5. ábra. öt-szín tétel.

Fessük át y 1-es színű szomszédját 3-asra. Ekkor természetesen az átfestett csúcs 3-as színű szomszédainak színét (ha vannak ilyenek) is meg kell változtatni, hogy a színezés jó maradjon. Legyenek ezek 1-es színűek. Ezután ha a most 1-es színűre festett csúcsoknak vannak 1-es színű szomszédai, azokat fessük 3-asra. Folytassuk az eljárást, amíg lehetséges. Könnyen belátható, hogy egy csúcsot legfeljebb egyszer festünk át. Ebből következik, hogy az eljárás véges sok lépésben befejeződik. Ha $G - \{y\}$ eredeti színezésében nem voltak azonos színű szomszédok, akkor az új színezésben sem lesznek.

Ha y-nak az eredetileg 3-as színű szomszédját nem érintette az eljárás, akkor y színét 1-esnek választva G-nek jó színezését kapjuk. Ellenkező esetben létezik egy kör a gráfban, aminek y-on kívüli csúcsai mind 1-es és 3-as színűek, továbbá az y csúcs 2-es és 4-es színű szomszédai közül az egyik a körön belül, a másik a körön kívül esik. Ez azt jelenti, hogy az eljárást az 1-es és 3-as színek helyett a 2-es és 4-es színekkel elvégezve nem fogjuk érinteni az y csúcs 4-es színű szomszédját, tehát ebben az esetben y festhető a 2-es színre. □

7. fejezet

Legrövidebb utak

7.1. Dijkstra-algoritmus

Legyen adott a $G(V, E)$ gráf. Súlyozzuk az éleket pozitív számokkal, azaz tekintsünk egy $w : E \to \mathbb{R}^+$ függvényt. Az élekhez rendelt súlyokat az élek hosszának is fogjuk nevezni. Keresendő a legrövidebb (minimális összsúlyú) út hossza

(a) adott $x, y \in V$ csúcsok között,

(b) adott $x \in V$-ből az összes többi csúcsba,

(c) minden csúcspár között.

Az (a)-t megoldó összes ismert algoritmus úgy működik, hogy közben tulajdonképpen megoldja (b)-t is, tehát nem ismert nagyságrendileg gyorsabb algoritmus (a)-ra, mint (b)-re. A most következő Dijkstra-algoritmus is a (b) feladatot oldja meg. Természetesen ezt minden $x \in V$-re alkalmazva megoldást kapunk (c)-re is.

Az algoritmus lényege, hogy x-ből indulva úgy járjuk be a csúcsokat, hogy mindig azt az y csúcsot vesszük sorra, amelyikbe x-ből a lehető legrövidebb, csak a már bejárt csúcsokon áthaladó úton juthatunk el. Ez biztosítja, hogy a bejárt csúcsok mindegyikéhez a lehető legrövidebb úton jussunk el.

Az **új** számot, az **elért** és **eddigi_min** tömböket, illetve az **elértek_száma** számlálót fogjuk használni:

új utoljára elért csúcs sorszáma,

elért(y) az y csúcsot elértük-e már (kezdetben minden csúcsra: NEM),

eddigi_min(y) az eddig talált legrövidebb x-ből y-ba vezető út hossza (kezdetben minden csúcsra: $+\infty$),

elértek_száma az elért csúcsok száma.

Az algoritmus lépései:

1. új $:= x$, elért(x) := IGEN, elértek_száma $:= 1$, eddigi_min$(x) := 0$
2. Amíg elértek_száma$< |V|$ és eddigi_min(új)$< +\infty$:

- *új*-nak minden nem elért z szomszédjára:
  $\text{eddigi_min}(z) := \min\{\text{eddigi_min}(z), \text{eddigi_min}(\text{új}) + w(\text{új}, z)\}$
- új := az a nem elért csúcs, ahol eddigi_min a legkisebb
- elért(új) := IGEN, elértek_száma := elértek_száma+1

Vizsgáljuk meg az algoritmus lépésszámát. Nevezzük csökkentésnek az **eddigi_min**(z) értékek módosítását. Egy ilyen művelet konstans időben elvégezhető. Összesen $O(e)$ csökkentést végzünk, tehát éllistával adott gráf esetén ez $O(e)$ időt igényel. Ha a gráf csúcsmátrixban van tárolva, akkor természetesen ugyanez csak $O(n^2)$ időben végezhető el. Az új csúcs meghatározásához szükséges minimum keresés $O(n)$ lépést igényel. Ezt $O(n)$-szer hajtjuk végre, tehát összesen $O(n^2)$ időre van szükségünk. Így az algoritmus futási ideje tárolási módtól függetlenül $O(n^2)$.

A következő fejezetben ismertetett kupac adatstruktúra minden művelete $O(\log n)$ idejű, így az **eddigi_min** tömb értékeinek kupacban való tárolásával a Dijkstra-algoritmus futási ideje éllistákkal adott gráf esetén $O((e+n)\log n)$ lesz. Ez ritka gráfok (pl. $e = O(n)$) esetén kevesebb, sűrű gráfok esetén viszont több, mint az eredeti $O(n^2)$ futási idő.

7.2. Kupacok

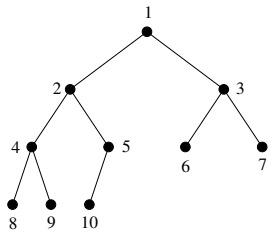
A Dijkstra-algoritmus javítása tehát azt a kérdést veti fel, hogyan lehet nyilvántartani n darab számot, hogy e darab csökkentést és n darab minimum keresést és törlést gyorsan lehessen elvégezni.

A most bemutatásra kerülő adatstruktúra a kupac (heap), amelyben az elemeket egy speciális bináris fa csúcsaiban tároljuk.

7.2.1. Definíció. *Egy bináris fa* **majdnem teljes**, *ha minden szintje maximális számú csúcsot tartalmaz, kivéve esetleg az utolsó szintet.*

7.2.2. Definíció. *Egy majdnem teljes bináris fa* **balra tömörített**, *ha az utolsó szinten a levelek a fa bal szélén helyezkednek el.*

Ha rögzítjük, hogy a fában egy szülőnek melyek a bal, illetve jobb oldali gyerekei, akkor a fát a 7.1. ábrának megfelelően lerajzolva érthetővé válik, mit jelent az, hogy a levelek a bal szélen találhatók.



7.1. ábra. Kupac elemeinek tömbben való tárolási sorrendje.

A továbbiakban a nyilvántartandó számokat egy fa csúcsaiban fogjuk tárolni.

7.2.3. Definíció. *Egy balra tömörített, majdnem teljes bináris fa* **kupac**, *ha minden szülő-gyerek elempárra teljesül, hogy a szülőben tárolt szám kisebb vagy egyenlő a gyerekben tároltnál.*

Lássuk, hogyan valósíthatók meg a csökkentés és a minimum törlés műveletek. A minimum törléshez szükségünk lesz a növelés műveletre, illetve megadjuk a beszúrás műveletet is, mert ezt is használni fogjuk a 7.3. fejezetben ismertetett rendezési algoritmusban.

csökkentés Ha egy elem értékét csökkentjük, előfordulhat, hogy kisebbé válik szülőjénél. Ekkor cseréljük meg a két elemet. Ennek hatása olyan, mintha egy szinttel feljebb a szülőt csökkentettük volna, tehát rekurzív módon ismételjük meg a műveletet erre az elemre. Így a csökkentett elem fölfelé mozog a fában.

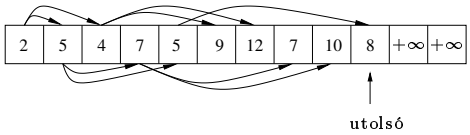
beszúrás A tömb utolsó kitöltött helye után a $+\infty$ helyére írjuk be az új elemet, növeljük meg 1-gyel az utolsó elem mutatóját, majd a csökkentéshez hasonlóan emeljük fel az új elemet addig, amíg szükséges.

növelés Elem növelésekor az okozhat gondot, hogy az elem nagyobbá válik valamelyik gyerekétől. Ebben az esetben nyilván a kisebb gyerekkel célszerű a megnövelt elemnek helyet cserélnie. Ennek hatása olyan, mintha egy szinttel lejjebb a megnövelt elem új helyén végeztünk volna növelést, tehát rekurzív módon ismételjük meg a műveletet erre az elemre. Így a megnövelt elem lefelé mozog a fában.

minimum törlés A kupac minimális eleme mindig a fa gyökerében található. Ezt úgy töröljük, hogy helyére beírjuk az utolsó elemet, majd azt a növelésben ismertetett módon süllyesztjük, amíg szükséges. Természetesen az utolsó elem helyére $+\infty$-t kell írni, és az utolsó elem mutatóját csökkenteni kell 1-gyel.

Mindegyik műveletben legfeljebb annyi cserét kell elvégezni, mint a fa magassága, ami $O(\log n)$. Egy csere konstans időben elvégezhető, tehát minden művelet lépésszáma $O(\log n)$.

Kupac tárolásának legegyszerűbb módja, ha elemeit egy tömbben tartjuk a 7.1. ábrán jelölt sorrendben. Ekkor az i-edik helyen tárolt elem bal és jobb gyereke rendre a $2i$ és $(2i+1)$-edik, szülője pedig az $\lfloor i/2 \rfloor$-edik helyre kerül. Tehát egy szülő valamely gyereke, valamint egy gyerek szülője konstans sok lépésben meghatározható. A tömb üres rekeszeibe írjunk $+\infty$-t, és tartsunk nyilván egy mutatót a tömb utolsó valódi elemére (7.2. ábra).



7.2. ábra. Kupac tárolása tömbben.

7.3. Kupacrendezés

A kupacok előző fejezetben ismertetett műveleteinek segítségével egyszerűen elvégezhető n szám növekvő sorrendbe rendezése. Az algoritmus lépései:

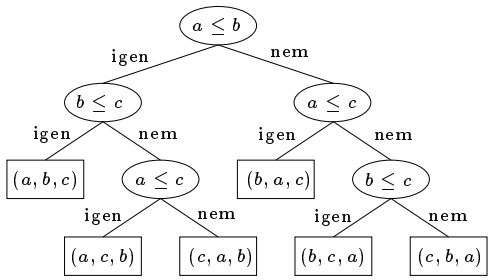
1. Foglaljunk helyet n elemű kupacnak. Kezdetben legyen a kupac üres.
2. Sorra szúrjuk be az n elemet.
3. Hajtsunk végre n darab minimum törlést. Ekkor az elemek növekvő sorrend szerint kerülnek törlésre.

Az elemek beszúrása és a minimum törlése is n-szer $O(\log n)$ időt vesz igénybe, tehát az algoritmus $O(n \log n)$ futási idejű. Megmutatjuk, hogy ennél nagyságrendileg jobb eredményt nem is érhetünk el, amennyiben a rendezést elempárok összehasonlítása alapján végezzük.

7.3.1. Definíció. *Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények, és legyen $f, g > 0$. Azt mondjuk, hogy $f(n) = \Omega(g(n))$, ha létezik olyan $c > 0$, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) \geq cg(n)$.*

7.3.2. Tétel. *Bármely n elemet összehasonlításokkal rendező algoritmus legrosszabb esetben $\Omega(n \log n)$ összehasonlítást végez.*

Bizonyítás. Bármely összehasonlításokkal rendező algoritmusnak megfeleltethető egy bináris döntési fa (7.3. ábra). A fa egy csomópontja egy összehasonlításnak, egy levele pedig



7.3. ábra. Rendezési algoritmus döntési fája.

egy lehetséges eredménynek, tehát az elemek egy permutációjának felel meg. Az algoritmus lefutása során a gyökérből valamely levélbe jut el, tehát legrosszabb esetben lépésszáma megegyezik a fa mélységével. Az elemek minden lehetséges permutációja előfordulhat, tehát egy helyes algoritmus döntési fájának legalább $n!$ levele van. Másrészt egy h mélységű bináris fa legfeljebb 2^h levelet tartalmaz, tehát $2^h \geq n!$, amiből $h \geq \log_2 n! = \Omega(n \log n)$. □

Amennyiben a számok bizonyos speciális tulajdonságokkal rendelkeznek, például egy adott intervallumba esnek, akkor $n \log n$-nél nagyságrendileg gyorsabban is rendezhetők olyan rendező algoritmusokkal (pl. vödörrendezéssel), amelyek nem csupán elempárok összehasonlítását végzik.

8. fejezet

Mohó algoritmusok

8.1. Amikor a mohóság nem vezet célra

8.1.1. Definíció. *Egy gráf köre* **Hamilton-kör**, *ha tartalmazza a gráf összes csúcsát.*

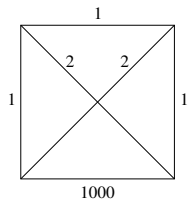
Súlyozzuk egy gráf éleit pozitív számokkal. Az élekhez rendelt súlyokat most az élek költségeinek fogjuk nevezni. Egy Hamilton-kör költségén éleinek összköltségét értjük. Feladatunk a minimális költségű Hamilton-kör meghatározása. A feladat az utazó ügynök problémájaként vált ismertté, ugyanis a gráf csúcsait városoknak, éleit pedig utaknak megfeleltetve arra keresi a választ, melyik az a legrövidebb útvonal, amelyet végigjárva az ügynök minden várost pontosan egyszer érint.

8.1.2. Definíció. *A* **mohó algoritmus** *a következő szabályok szerint működik:*

(1) mindig a minimális költségű megengedett lépést hajtjuk végre,

(2) korábbi lépések érvényét később nem vonjuk vissza.

Hamilton-kör keresésekor megengedett lépés egy él választása, ha az él nem zár n-nél rövidebb kört (n a csúcsok száma), és hozzávételével nem keletkezik harmadfokú csúcs. A mohó algoritmus minden lépésben a megengedett élek közül a minimális költségűt választja a leendő Hamilton-kör egyik élének. A 8.1. ábra egy olyan gráfot mutat, ahol a mohó algoritmus nem minimális megoldást ad. Itt először mohón kiválasztjuk a három 1 költségű élt, majd



8.1. ábra. A mohó algoritmus nem mindig optimális megoldást ad.

szükségszerűen az 1000 költségű kerül kiválasztásra, így a minimális 6 költségű Hamilton-kör helyett egy sokkal rosszabb megoldást kapunk.

Megjegyezzük, hogy a problémának nem ismert polinom idejű megoldása, így nem meglepő, hogy a mohó algoritmus sem alkalmazható. A példa azt a célt szolgálta, hogy lássuk,

a mohó módszer nem minden feladat esetében alkalmazható, ahol célunk az optimális megoldás megtalálása. A következő fejezet azonban egy olyan problémát tárgyal, ahol a mohó algoritmus alkalmazása (kivételesen) minden esetben optimális megoldáshoz vezet.

8.2. Minimális költségű feszítő fa

Tekintsük a $G(V,E)$ gráfot és az élek $w : E \to \mathbb{R}^+$ súlyozását.

8.2.1. Definíció. *A G valamely részgráfja* **feszítő fa**, *ha fa és tartalmazza G összes csúcsát.*

Feszítőfa költségén éleinek összköltségét értjük.

Feladat: *Keressük G minimális költségű feszítő fáját.*

A most következő Kruskal-algoritmus mohó választással oldja meg ezt a feladatot.

1. Rendezzük az éleket költségük szerint növekvő sorrendbe.
2. Az éleket sorban tekintve akkor vegyünk be egyet, ha az eddig kiválasztottakkal nem zár be kört.

8.2.2. Állítás. *Ha G összefüggő, akkor a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítő fát állít elő.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{F}_0$ a Kruskal-algoritmus által előállított gráfot.
1. *$\mathcal{F}_0$ fa.* Az élek választási módja miatt $\mathcal{F}_0$ nyilván körmentes. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_0$ nem összefüggő. Ekkor két részre osztható úgy, hogy a részek között nem halad él. Mivel feltételünk szerint G összefüggő, G-nek van legalább egy olyan éle, ami a két részt köti össze. Az ilyen élek közül a minimális költségűt viszont biztosan kiválasztja az algoritmus, hiszen hozzávételével nem keletkezik kör.
2. *$\mathcal{F}_0$ feszítő fa.* Minden csúcs esetén a rá illeszkedő élek közül a legolcsóbbat biztosan kiválasztjuk, ugyanis felvétele nem okozhat kört. Tehát $\mathcal{F}_0$ tartalmazza az összes csúcsot.
3. *$\mathcal{F}_0$ minimális.* Jelölje m a G gráf éleinek számát, $e_1, e_2, \ldots, e_m$ pedig az éleit költségük szerint növekvő (pontosabban nem csökkenő) sorrendben. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_0$ nem minimális, és legyen $\mathcal{F}$ egy olyan minimális feszítő fa, ami az élek fenti sorrendjében a lehető legtovább megegyezik $\mathcal{F}_0$-lal. Legyen e_i az első olyan él, amelyben $\mathcal{F}$ különbözik $\mathcal{F}_0$-tól. A mohó élválasztás miatt e_i mindenképp $\mathcal{F}_0$-nak az éle, ugyanis $e_i \in \mathcal{F}$ és $e_i \notin \mathcal{F}_0$ esetén e_i kört zárna $\mathcal{F}$-ben. Vegyük hozzá $\mathcal{F}$-hez az e_i élt. Ekkor pontosan egy kör keletkezik. A körnek létezik olyan éle (e_j), amelynek indexe nagyobb i-nél, ugyanis ha a kör minden éle i-nél kisebb indexű lenne, akkor a mohó algoritmus a kör összes élét még e_i előtt kiválasztotta volna, tehát e_i nem lett volna megengedett választás. Cseréljük le $\mathcal{F}$-ben e_j-t e_i-re. Az így keletkező feszítő fa költsége nem nő $\mathcal{F}$-hez képest, tehát minimális, másrészt tovább egyezik $\mathcal{F}_0$-lal, mint $\mathcal{F}$, ami ellentmond $\mathcal{F}$ választásának. □

8.3. A Kruskal-algoritmus megvalósítása

Éllistákkal adott gráf esetén az élek költség szerinti rendezése elvégezhető $O(m \log m) = O(m \log n)$ időben. Ezután m darab döntést kell hoznunk, hogy a soron következő e_k él zár-e kört a feszítő fa eddig meghatározott éleivel. Jelölje x és y az e_k él végpontjait. Az e_k pontosan akkor zár kört, ha x és y azonos komponensbe tartoznak. Tartsuk nyilván ezért a *hol_van* tömbben minden csúcsról, hogy melyik komponensbe tartozik.

1. Kezdetben minden $i = 1, \ldots, n$-re *hol_van(i)* := i.

2. Az $e_k(x, y)$ él vizsgálatakor, ha *hol_van(x)* = a, és *hol_van(y)* = b, akkor

   - $a = b$ esetén az e_k élt nem vesszük hozzá a feszítő fához,
   - $a \neq b$ esetén e_k-t hozzávesszük, és a *hol_van* tömbben minden b értéket átírunk a-ra.

Minden lépésben legfeljebb $O(n)$ elem kerül átírásra, így az átírások és egyben az algoritmus időigénye is $O(mn)$.

Megmutatjuk, hogy új tárolási mód bevezetésével jobb eredményt is elérhetünk, ha átíráskor azt az értéket változtatjuk meg, amelyikből kevesebb található a *hol_van* tömbben. A probléma általánosabb megfogalmazása az „UNIÓ-HOL VAN" feladat:

- n elemű halmaz elemeiről kell tárolni, hogy mely halmazba esnek,
- kezdetben minden elem külön halmazban van,
- n darab unió műveletet hajtunk végre,
- m-szer döntünk, hogy az x és y elemek azonos halmazba esnek-e.

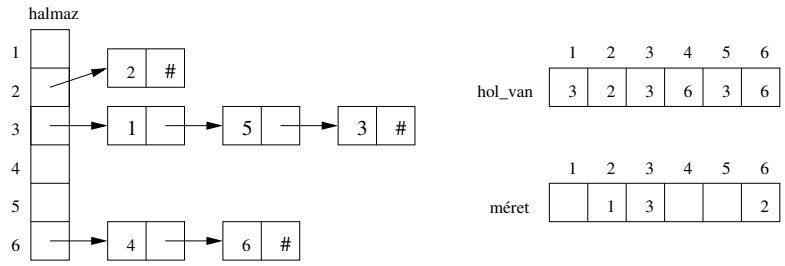
Három tömböt használunk:

hol_van(i) az i elem melyik halmazba esik (kezdetben: i),

halmaz(i) az i-edik halmaz elemeinek láncolt listája (kezdetben: az i elemet tartalmazó egyelemű lista),

méret(i) az i-edik halmaz elemszáma (kezdetben: 1).

A 8.2. ábra a halmazok tárolását szemlélteti.



8.2. ábra. A három tömb.

Legyen *hol_van(x)*= a, *hol_van(y)*= b, és tegyük fel, hogy például *méret(a)*≤*méret(b)*. Az *unió*(x, y) művelet lépései:

1. A *halmaz(a)* listában szereplő elemeknél a *hol_van* tömbben az a értékeket átírjuk b-re.
2. A *halmaz(a)* listát a *halmaz(b)* lista elejére fűzzük.
3. *méret(b)* := *méret(a)*+*méret(b)*.

Az első és második lépés nagyságrendileg annyi időt vesz igénybe, amennyi elem új halmazba kerül a két halmaz egyesítésekor. Másrészt

egy elemet legfeljebb $O(\log n)$-szer teszünk át másik halmazba,

mivel minden átrakás alkalmával legalább kétszer akkora halmazba kerül. Így az n darab unió művelet összesen $O(n \log n)$ idő alatt elvégezhető. A *hol_van* tömb alapján konstans időben eldönthető, hogy két elem azonos halmazba esik-e, tehát az „UNIÓ-HOL VAN" feladat $O(n \log n + m)$ lépésszámú megoldását kaptuk. Ennek alkalmazásával a Kruskal-algoritmus az élek rendezésével együtt $O((m + n) \log n)$ futási idejű.

Megjegyzés: Az „UNIÓ-HOL VAN" feladatra még a fentinél is gyorsabb (ha nem is lineáris, de ahhoz közeli idejű) algoritmus található pl. *Rónyai-Ivanyos-Szabó: Algoritmusok* c. könyvében.

9. fejezet

Gráfok kromatikus száma

9.1. A kromatikus szám fogalma

A 6.2. fejezetben azt vizsgáltuk, hány színt felhasználva lehet síkgráfok csúcsait úgy színezni, hogy szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Most ugyanezzel a kérdéssel foglalkozunk tetszőleges gráfok esetén.

9.1.1. Definíció. *A G gráf* **(jól) színezhető** *k színnel, ha csúcsai k osztályba sorolhatók úgy, hogy a szomszédosak különböző osztályba kerüljenek.*

9.1.2. Definíció. *A G gráf* **kromatikus száma** *$\chi(G)$ a legkisebb olyan k szám, amelyre igaz, hogy G jól színezhető k színnel.*

Nyilván $\chi(G) = 2$ akkor és csak akkor teljesül, ha G páros gráf. Másképp fogalmazva egy gráfot akkor és csak akkor lehet két színnel színezni, ha nem létezik páratlan köre. Eszerint azt mondhatjuk, hogy a páratlan kör nem létezése *jó karakterizációja* egy gráf két színnel színezhetőségének. Nem ismert azonban olyan gráf tulajdonság, ami jó karakterizációja lenne egy gráf k színnel való színezhetőségének $k \geq 3$ esetén.

9.2. Kromatikus szám és teljes részgráfok

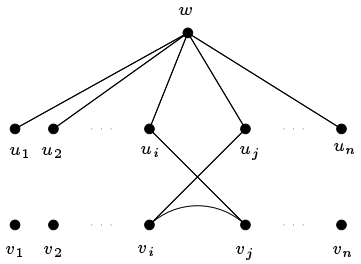
9.2.1. Állítás. *Ha $\chi(G) \leq k$, akkor G nem tartalmaz $k+1$ csúcsú teljes gráfot.*

Bizonyítás. Ha $K_{k+1} \subset G$, akkor K_{k+1} csúcsait szükségszerűen különböző színnel kell színezni, tehát G nem színezhető k színnel. □

Az állítás megfordítása nem igaz, például $k = 2$ esetén egy 5 csúcsú kör megfelelő ellenpélda. Még az sem igaz, hogy ha a kromatikus szám nagy, akkor a gráf tartalmaz nagy teljes részt; tetszőlegesen nagy k számhoz létezik olyan $k-1$ színnel nem színezhető gráf, amely még háromszöget sem tartalmaz.

9.2.2. Állítás. *Bármely $k \in \mathbb{N}$-re létezik olyan G_k gráf, amely nem tartalmaz háromszöget, és $\chi(G_k) \geq k$.*

Bizonyítás (Mycelsky-konstrukció). Ha $k = 1$, akkor az állítás triviális. $k = 2$-re legyen G_2 egy két csúcsból, és az őket összekötő élből álló gráf. Tegyük fel, hogy G_k-t már előállítottuk, és definiáljuk G_{k+1}-et ennek segítségével. Jelölje $v_1, v_2, \ldots, v_n$ G_k csúcsait.



9.1. ábra. Mycelsky-konstrukció.

Vegyük fel ezeken kívül az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ és w új csúcsokat (9.1. ábra). A G_k eredeti élei mellett vegyük fel a következő éleket:

- Minden $1 \leq i \leq n$-re (w, u_i) legyen éle G_{k+1}-nek.
- Minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén (u_i, v_j) akkor és csak akkor szerepeljen G_{k+1}-ben, ha (v_i, v_j) szerepel G_k-ban.

Az így definiált G_{k+1} gráf nem tartalmaz háromszöget. Tegyük fel, hogy $\chi(G_{k+1}) \leq k$, és tekintsük G_{k+1} valamely jó színezését az $1, 2, \ldots, k$ színekkel. Legyen például w k színű. Ekkor az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsok között csak az $1, 2, \ldots, k-1$ színek szerepelhetnek. Ha valamely v_i k színű, akkor fessük át v_i-t az u_i színére. Így G_k-t $k-1$ színnel színeztük jól, hiszen egy átfestett v_i csúcs színe nem egyezhet meg semelyik vele összekötött v_j színével, mert akkor az összekötött u_i és v_j csúcsok színe is megegyezne. Azt kaptuk tehát, hogy $\chi(G_k) \leq k-1$, ami ellentmondás. □

9.3. Kromatikus szám és fokszámok

9.3.1. Állítás. *Ha G minden csúcsa legfeljebb k fokú, akkor $\chi(G) \leq k+1$.*

Bizonyítás. A csúcsok tetszőleges sorrendjéhez mohón kereshetünk színezést, ugyanis egy x csúcs színezésekor legfeljebb k szín tiltott (az x-szel szomszédos, már kiszínezett csúcsok színei), így fennmarad legalább egy szín, amelyre x színezhető. □

9.3.2. Tétel (Brooks). *Ha $k \geq 3$ esetén a $G(V, E)$ gráf minden csúcsának foka legfeljebb k, és G nem tartalmaz $k+1$ csúcsú teljes gráfot, akkor $\chi(G) \leq k$.*

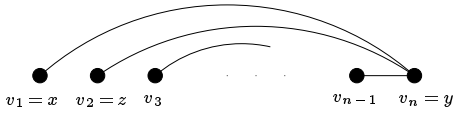
Bizonyítás (Lovász László). Ha G-nek legfeljebb 3 csúcsa van, akkor nyilván színezhető k színnel. Feltehető tehát, hogy G-nek van legalább 4 csúcsa.

(1) Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor G háromszorosan összefüggő. Feltehető, hogy létezik pontosan k-adfokú csúcs (különben alkalmazhatjuk a 9.3.1. állítást). Mivel G nem teljes, az „összekötöttség" reláció nem tranzitív. Másszóval léteznek olyan x, y, z csúcsok, hogy $(x, y), (y, z) \in E$, de $(x, z) \notin E$. Tekintsük a csúcsok $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$ sorrendjét (9.2. ábra), amelyre teljesül, hogy

- $v_1 = x$,
- $v_2 = z$,
- $v_n = y$,

- $\forall i \leq n-1$-re vezet él valamely $j > i$ indexű v_j-be.

Ilyen sorrend létezik, például legyenek $v_n, n_{n-1}, \ldots, v_3$ ebben a sorrendben a $G - \{x, z\}$ (G háromszoros összefüggősége miatt még mindig összefüggő) gráfban az y-ból indított szélességi keresés által bejárt csúcsok. Megmutatjuk, hogy ebben a sorrendben a mohó színezés jó



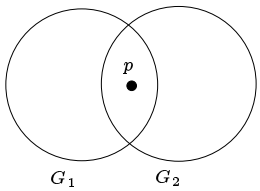
9.2. ábra. A gráf csúcsainak sorba rendezése.

lesz. Színezzük x-et és z-t azonos színűre. Ezután a megadott sorrendben $v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}$ is színezhetők, ugyanis maximum $k-1$ szín tiltott (mindegyikből vezet él jobbra, így a fokszámra vonatkozó korlátozás miatt legfeljebb $k-1$ él indul belőlük balra), és végül y-nak is találunk megfelelő színt, hiszen legalább két vele összekötött csúcs (x és z) azonos színű.

(2) Most tegyük fel, hogy van olyan gráf, amely teljesíti a tétel feltételeit, de nem színezhető k színnel. Legyen G egy minimális csúcsszámú ilyen gráf. Az (1) eset miatt, ha megmutatjuk, hogy G háromszorosan összefüggő, ellentmondáshoz jutunk.

Nyilván G *összefüggő*, mert ha nem lenne az, akkor legalább egy komponense sem lenne színezhető k színnel, tehát G nem lenne minimális ellenpélda.

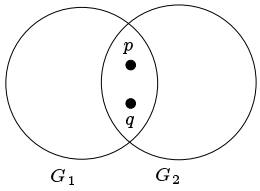
Belátjuk, hogy G *kétszeresen összefüggő*. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan p csúcs, amelyre $G - \{p\}$ nem összefüggő. Legyenek G_1 és G_2 olyan p-t tartalmazó, legalább két csúcsú részgráfok, hogy $G_1 - \{p\}$ és $G_2 - \{p\}$ között nem halad él, és $G = G_1 \cup G_2$ (9.3. ábra). Mivel G_1 és G_2 is teljesítik a tétel feltételeit, G minimális volta miatt G_1 és G_2



9.3. ábra. G szétvágó csúcsa.

színezhetők k színnel, sőt léteznek olyan színezéseik is, amelyekben p színe megegyezik. Így G jó színezését kapjuk, ami ellentmond G választásának.

A *háromszoros összefüggőség* belátásához szintén indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel tehát, hogy léteznek olyan p és q csúcsok, amelyekre $G - \{p, q\}$ nem összefüggő. Definiáljuk az előzőhöz hasonló módon a G_1 és G_2 részgráfokat (9.4. ábra). Két esetet



9.4. ábra. G szétvágó csúcspárja.

különböztetünk meg:

(a) *A (p,q) élt behúzva (ha eddig nem volt) G_1 és G_2 teljesítik a tétel feltételeit.*

Ebben az esetben G_1-nek és G_2-nek is létezik olyan színezése, amelyben p és q különböző színű, ezekből pedig színek felcserélésével G jó színezése is előállítható.

(b) *A (p,q) élt behúzva például G_1 megsérti valamelyik feltételt.*

G kétszeres összefüggősége miatt sem p, sem q elhagyásával nem esik szét a gráf, tehát p-ből és q-ból is vezet él G_2-be. Ez azt jelenti, hogy a (p,q) él behúzásával G_1 nem sértheti meg a p vagy q fokszámára tett korlátozást, mert akkor G is megsértené. Tehát szükségszerűen a másik feltétel sérült, azaz $K_{k+1} \subset G_1 \cup (p,q)$, sőt a fokszámok felső korlátja miatt $G_1 \cup (p,q) = K_{k+1}$ is teljesül, így G_1-nek megadható olyan színezése, amelyben p és q azonos színű. Másrészt p-ből és q-ból is pontosan egy él vezet G_2-be, így $k \geq 3$ miatt $G_2 - \{p,q\}$ egy jó színezése kiterjeszthető G_2-re úgy, hogy p és q azonos színű legyen. Ebből G_1 színezésével együtt G-nek is jó színezését kapjuk, ami viszont ellentmond G választásának. □

9.4. Végtelen gráfok kromatikus száma

A következő tétel szerint végtelen gráf színezhetőségét meghatározza véges részgráfjainak színezhetősége.

9.4.1. Tétel (Erdős-De Bruijn). *Egy végtelen gráf akkor és csak akkor színezhető k színnel, ha minden véges részgráfja színezhető.*

Bizonyítás (Pósa Lajos). A tétel „csak akkor" része triviális. Tegyük fel, hogy a G végtelen gráf nem színezhető k színnel, de minden véges $G' \subset G$-re $\chi(G') \leq k$. Telítsük G-t, azaz, amíg lehet, vegyünk hozzá éleket úgy, hogy minden véges $G' \subset G$-re igaz maradjon, hogy $\chi(G') \leq k$. (Ha G csúcsainak száma megszámlálható, akkor éleinek száma is, tehát ekkor az éleket sorba rendezve valóban elvégezhető a telítés. A nem megszámlálható esetben is lehet telíteni G-t, de ezt most nem részletezzük.)

A telítéssel kapott gráfot jelölje $\hat{G}$. Megmutatjuk, hogy

$\hat{G}$-ban az „össze nem kötöttség" tranzitív,

azaz bármely x, y és z csúcsok esetén, ha $\hat{G}$ nem tartalmazza az (x,y) és (y,z) éleket, akkor az (x,z) élt sem. Mivel a telítés során az (x,y) él nem került be $\hat{G}$-ba, létezik egy olyan x-et és y-t tartalmazó véges $G_1 \subset G$ gráf, amelynek csak olyan jó színezése van k színnel, amelyben x és y azonos színű. Hasonlóan létezik egy y-t és z-t magába foglaló véges $G_2 \subset G$ gráf, amelyet csak úgy tudunk k színnel színezni, hogy y-t és z-t azonos színűre festjük. Ebből következik, hogy $G_1 \cup G_2$ minden jó színezésében x, y és z azonos színű, tehát az (x,z) él sem kerülhet be $\hat{G}$-ba a telítés során.

Az „össze nem kötöttség" tranzitivitása miatt $\hat{G}$ csúcsai ekvivalencia-osztályokba sorolhatók úgy, hogy osztályon belül nincs él, és az osztályok között minden él be van húzva. A nem üres osztályok száma legfeljebb k, mert $k+1$ nem üres osztály esetén ezen osztályokból egy-egy elemet választva a K_{k+1} gráfot kapnánk, ami nem színezhető k színnel. Így minden osztályt különböző színre színezve $\hat{G}$-nak jó színezését kapjuk k színnel. Ekkor viszont $G \subset \hat{G}$ miatt G is színezhető k színnel, ami ellentmondás. □

10. fejezet

Extremális gráfok

10.1. Turán-tétel

Extremális gráfoknak nevezzük adott tulajdonságú gráfok közül a maximális élszámúakat. Ilyen tulajdonságnak válasszuk most azt, hogy a gráf nem tartalmaz r csúcsú teljes gráfot. Azt vizsgáljuk tehát, hogy az n csúcsú, K_r-t nem tartalmazó gráfok közül melyek a maximális élszámúak, és ezeknek hány élük van.

Ha $r = 3$, akkor könnyen belátható, hogy az a páros gráf tartalmazza a legtöbb élt, amelyben a két osztályba egyenlő számú csúcs tartozik (páratlan n esetén az egyikbe nyilván 1-gyel több), és a két osztály között az összes él be van húzva. Ekkor $e = \lfloor n^2/4 \rfloor$.

10.1.1. Definíció. *Egy gráfot* **teljes r osztályú gráfnak** *nevezünk, ha csúcsai r diszjunkt osztályba sorolhatók úgy, hogy osztályon belül nincs él, és osztályok között minden él be van húzva.*

10.1.2. Definíció. *Egy teljes r osztályú gráf* **Turán-gráf**, *ha a csúcsok r osztályba sorolása egyenletes, azaz bármely két V_i, V_j osztály esetén $\big||V_i| - |V_j|\big| \leq 1$. Az n csúcsú, r osztályú Turán-gráfot jelölje $T(n,r)$, éleinek számát pedig $t(n,r)$.*

A $K_r \not\subseteq G$ feltétel nyilván teljesül, ha G teljes $r-1$ osztályú gráf. Először megmutatjuk, hogy az ilyen gráfok között $T(n,r-1)$-nek van a legtöbb éle.

10.1.3. Állítás. *Az n csúcsú és r osztályú gráfok között a Turán-gráf maximális élszámú.*

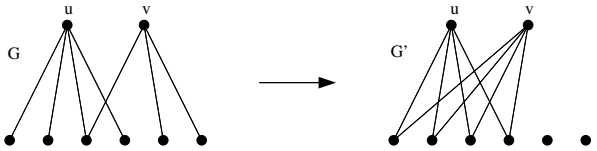
Bizonyítás. Egy r osztályú, nem teljes gráf nem lehet maximális élszámú, hiszen teljessé téve éleinek száma nő. Tegyük fel, hogy a maximális élszámú teljes r osztályú gráfban a csúcsok elosztása nem egyenletes, azaz léteznek olyan V_i és V_j osztályok, melyekre $|V_i| \geq |V_j| + 2$. Tegyük át V_i egyik csúcsát V_j-be. Ahhoz, hogy a gráf az új osztályozás szerint teljes r osztályú legyen, fel kell vennünk $|V_i| - 1$ élt, és törölnünk kell $|V_j|$ élt, így az élszám változása $|V_i| - 1 - |V_j| > 0$, tehát az eredeti gráf nem volt maximális élszámú. □

Be fogjuk látni, hogy $T(n,r-1)$ a K_r-t nem tartalmazó gráfok között is maximális élszámú. Ehhez szükségünk lesz a szimmetrizálás fogalmára, és annak néhány tulajdonságára.

10.1.4. Definíció. *Legyenek u és v a G gráf egymással nem összekötött csúcsai. A v csúcsot szimmetrizálva u-hoz a következő G' gráfot kapjuk (10.1. ábra):*

- *G' ugyanazokat a csúcsokat tartalmazza, mint G,*

- *G'-ben v pontosan azokkal a csúcsokkal van összekötve, mint G-ben u,*
- *bármely v-re nem illeszkedő él, akkor és csak akkor éle G'-nek, ha éle G-nek is.*



10.1. ábra. A v szimmetrizálása u-hoz.

10.1.5. Lemma. *A G gráfban az u csúcshoz szimmetrizálva a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ csúcsokat a G' gráf keletkezik. Ekkor*

(1) *a szimmetrizálást tetszőleges sorrendben elvégezve ugyanazt a G' gráfot kapjuk,*

(2) *ha $K_r \not\subseteq G$, akkor $K_r \not\subseteq G'$,*

(3) *ha G-ben u maximális fokú csúcs, akkor a szimmetrizálás által az élszám nem csökken,*

(4) *ha G-ben u maximális fokú, és a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ csúcsok között van él, akkor a szimmetrizálás által az élszám nő.*

Bizonyítás. (1) Triviális.

(2) Tegyük fel, hogy G'-ben keletkezett K_r. Ekkor ennek csúcsa kell legyen valamelyik v_i is, hiszen csak a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ csúcsokra illeszkedő élek változtak meg. Mivel G'-ben v_i és u ugyanazokkal a csúcsokkal vannak összekötve, és közöttük nincs él, a v_i-t u-ra cserélve szintén K_r-t kapunk. Ez a K_r viszont már G-nek is része volt, ami ellentmondás.

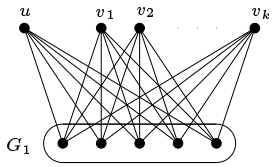
(3) Minden v_i-re igaz, hogy a $v_1, \ldots, v_{i-1}$ csúcsok szimmetrizálása által v_i foka nem nő, hiszen u nincs összekötve v_i-vel. Tehát u foka v_i szimmetrizálásakor is legalább annyi, mint v_i foka. Így egyik szimmetrizálás alatt sem csökken az élszám.

(4) Mivel (1) szerint a sorrend lényegtelen, feltehetjük, hogy v_1 és v_2 van összekötve. Először v_1-et szimmetrizálva v_2 foka csökken, tehát kisebb lesz u fokánál, ezért v_2 szimmetrizálásakor az élszám nő. □

10.1.6. Tétel (Turán). *Jelölje n a G gráf csúcsainak, e pedig éleinek számát. Ha $K_r \not\subseteq G$, akkor $e \leq t(n, r-1)$, továbbá egyenlőség akkor és csak teljesül, ha $G = T(n, r-1)$.*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk r szerint. Ha $r = 2$, akkor a tétel triviális. Tegyük fel, hogy $r-1$-re is igaz az állítás, és tekintsünk egy maximális élszámú G gráfot, melyre $K_r \not\subseteq G$. Legyen u maximális fokú csúcsa G-nek. Szimmetrizáljuk u-hoz az összes vele össze nem kötött $v_1, v_2, \ldots, v_k$ csúcsokat. Az u-val szomszédos csúcsok alkotta részgráfot jelölje G_1 (10.2. ábra). A lemma (2) és (3) pontjai miatt az új gráf sem tartalmaz K_r-t, és szintén maximális élszámú. A lemma (4) pontja alapján az $\{u, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ halmazon belül nincs egy él sem, hiszen az élszám nem nőtt a szimmetrizálás által. Ez azt jelenti, hogy minden v_i eredetileg is össze volt kötve G_1 összes csúcsával, különben nőtt volna az élszám. Tehát a szimmetrizálás a gráfon nem változtatott semmit.

A G_1 gráf nem tartalmazhat K_{r-1}-et, mert ahhoz egy tetszőleges csúcsot hozzávéve K_r-et kapnánk. Másrészt G maximális volta miatt G_1 is maximális élszámú a K_{r-1}-et nem tartalmazó gráfok között, így az indukciós feltétel alapján G_1 $r-2$ osztályú gráf. Ekkor a G viszont $r-1$ osztályú, tehát a 10.1.3. állítás alapján $G = T(n, r-1)$. □



10.2. ábra. A maximális élszámú G gráf.

Ha K_r helyett egy tetszőleges H gráf tartalmazását tiltjuk meg, akkor egy általánosabb problémát kapunk.

10.1.7. Definíció. *Legyen $ext(n, H)$ az a maximális élszám, ami egy n csúcsú, H-t nem tartalmazó gráfnak lehet.*

A Turán-tétel alapján $ext(n, K_r) = t(n, r-1)$. A következő, itt nem bizonyított tétel megadja $ext(n, H)$ nagyságrendjét.

10.1.8. Tétel (Erdős-Stone-Simonovits). *Tetszőleges H esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ext(n,H)}{n^2} = \frac{\chi(H)-2}{2(\chi(H)-1)} \ ,$$

ahol $\chi(H)$ a H kromatikus száma.

A tétel nem páros H gráf esetén pontosan megadja, hogy az élek hányadrésze lehet behúzva, páros H esetén pedig azt állítja, hogy az élek száma n^2-nél kisebb nagyságrendű. Mivel

$$t(n, r-1) \approx \frac{r-2}{2(r-1)} n^2,$$

a tétel szerint H megtiltásával a gráf körülbelül annyi élt tartalmazhat, mintha a $K_{\chi(H)}$ gráfot tiltanánk meg.

10.2. Maximálishoz közeli távolságok száma

Tekintsünk n pontot a síkon. A közöttük fellépő maximális távolság legyen 1, továbbá legyen $\mathcal{E} > 0$.

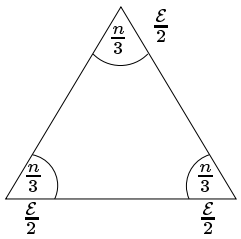
Legfeljebb hány olyan pontpár lehet, melynek távolsága legalább $1 - \mathcal{E}$?

Ha egy egységnyi oldalú szabályos háromszögön belül minden csúcs $\mathcal{E}/2$ sugarú környezetébe körülbelül $n/3$ pontot helyezünk (10.3. ábra), akkor $\lfloor n^2/3 \rfloor$ ilyen pontpár keletkezik. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{E} < 1 - 1/\sqrt{2}$ esetén ez a legjobb konstrukció. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

10.2.1. Lemma. *Ha 4 pont között a maximális távolság 1, akkor létezik két pont, melyek legfeljebb $1/\sqrt{2}$ távol vannak egymástól.*

Bizonyítás. (a) Ha valamely 3 pont egy egyenesbe esik, akkor ezen az egyenesen a középső pont az egyik szélsőtől maximum $1/2$ távol van.

(b) Ha a 4 pont egy konvex négyszöget határoz meg, akkor húzzuk be az egyik legalább 90°-os belső szöghöz tartozó csúcsra nem illeszkedő átlót. Így keletkezik egy derék- vagy



10.3. ábra. $\lfloor n^2/3 \rfloor$ maximálishoz közeli távolság.

tompaszögű háromszög. Ebben a legkisebb és legnagyobb oldal aránya legfeljebb $1/\sqrt{2}$, tehát a legkisebb oldal hossza is maximum $1/\sqrt{2}$.

(c) Ha a négy pont egyike a másik három által alkotott háromszögön belül helyezkedik el, akkor ezt a pontot összekötve a többivel szintén keletkezik tompaszögű háromszög, így az előző gondolatmenet alkalmazható. □

10.2.2. Állítás. *Ha n síkbeli pont között a maximális távolság 1, akkor az $1/\sqrt{2}$-nél nagyobb távolságok száma legfeljebb $\lfloor n^2/3 \rfloor$.*

Bizonyítás. A pontokat egy gráf éleinek tekintve kössük össze azokat, amelyek $1/\sqrt{2}$-nél messzebb vannak egymástól. A lemma miatt az így keletkező gráf nem tartalmaz K_4-et, tehát a Turán-tétel alapján éleinek száma legfeljebb $t(n,3) = \lfloor n^2/3 \rfloor$. □

10.3. Maximális élszám páros gráfok tiltása esetén

A 10.1.8. tétel nem határozza meg az olyan gráfok maximális élszámának nagyságrendjét, amelyeknél egy páros gráf tartalmazását tiltjuk meg. Vizsgáljuk most ezt a kérdést néhány nevezetes páros gráf esetén.

10.3.1. Definíció. *Jelölje $K_{k,l}$ azt a páros gráfot, melynek osztályai k, illetve l eleműek, és az osztályok között minden él be van húzva.*

Tekintsük először a $K_{2,2}$-t, azaz vizsgáljuk azokat a gráfokat, amelyek nem tartalmaznak 4 hosszú kört.

10.3.2. Állítás. *Létezik olyan $C > 0$ szám, amelyre minden n esetén*

$$ext(n, K_{2,2}) \leq Cn^{3/2}.$$

Bizonyítás. Nevezzük *cseresznyéknek* a 2 hosszú utakat. Ha a gráf fokszámait $d_1, d_2, \ldots, d_n$ jelöli, akkor a cseresznyék száma

$$\binom{d_1}{2} + \binom{d_2}{2} + \ldots + \binom{d_n}{2}.$$

Az $\binom{x}{2}$ függvény konvex, így a Jensen-egyenlőtlenség alapján a fenti kifejezés akkor minimális, ha a fokszámok egyenletesen vannak elosztva, azaz minden fokszám körülbelül $2e/n$, ahol e az élek számát jelöli. Ebből következik, hogy a cseresznyék száma legalább $e(\frac{2e}{n} - 1)$. Másrészt, ha a gráf nem tartalmaz 4 hosszú kört, akkor minden csúcspárhoz legfeljebb egy

olyan cseresznye tartozhat, melynek ezek a végpontjai, tehát a cseresznyék száma legfeljebb $\binom{n}{2}$. Így

$$e\left(\frac{2e}{n}-1\right) \leq \binom{n}{2},$$

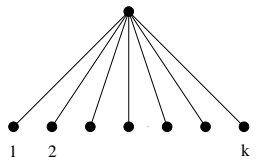
amiből $e \leq Cn^{3/2}$ adódik. □

A 11.2. fejezetben a véges geometriák segítségével megmutatjuk, hogy az $n^{3/2}$ nagyságrend el is érhető.

10.3.3. Állítás. *Legyen $k \leq l$. Ekkor létezik olyan $C_1 > 0$, melyre minden n esetén*

$$ext(n, K_{k,l}) \leq C_1 n^{2-1/k}.$$

Bizonyítás. Az állítás *k-cseresznyék* (10.4. ábra) segítségével a 10.3.2. állításhoz hasonlóan bizonyítható. □



10.4. ábra. k-cseresznye.

A legjobb ismert $K_{k,l}$-t nem tartalmazó általános konstrukciónak $cn^{2-2/k}$ éle van. A sejtés az, hogy az állításban szereplő felső korlát a pontos, ezt erősíti a következő tétel is.

10.3.4. Tétel (Kollár-Rónyai-Szabó). *Ha $l > k!$, akkor létezik olyan $c_2 > 0$, melyre minden n esetén*

$$ext(n, K_{k,l}) \geq c_2 n^{2-1/k}.$$

Most vizsgáljuk gráfok maximális élszámát fák (szintén páros gráfok) tiltása esetén.

10.3.5. Állítás. *Ha $e > \lfloor \frac{(k-1)n}{2} \rfloor$, akkor az n csúcsú, e élű gráf tartalmaz k élű csillagot.*

Bizonyítás. Ha a gráfban nem található k élű csillag, akkor minden csúcsának foka legfeljebb $k-1$, ami ellentmond feltételünknek. □

Ha egy n csúcsú gráf diszjunkt K_k részgráfokból áll (és esetleg egy kisebb teljes részgráfból), akkor az nyilván nem tartalmaz k élű utat. Ennek a gráfnak körülbelül $\frac{(k-1)n}{2}$ éle van. Erdős és Gallai bizonyították be, hogy a k élű utat nem tartalmazó gráfok között ez extremális.

10.3.6. Tétel (Erdős-Gallai). *Ha $e > \lfloor \frac{(k-1)n}{2} \rfloor$, akkor az n csúcsú, e élű gráf tartalmaz k élű utat.*

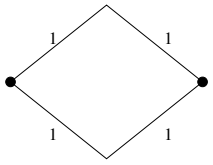
10.3.7. Sejtés (Erdős-Sós). *Ha $e > \lfloor \frac{(k-1)n}{2} \rfloor$, akkor az n csúcsú, e élű gráf tartalmazza az összes k élű fát.*

10.4. Egyforma távolságok száma

Tekintsünk n pontot a síkon. Vizsgáljuk meg, hányszor fordulhat elő adott távolság a pontpárok között! Ezzel nyilván ekvivalens feladat az egységtávolságok maximális számának vizsgálata.

10.4.1. Állítás. *A síkon n pont között az egységtávolság $O(n^{3/2})$-szer fordulhat elő.*

Bizonyítás. Kössük össze éllel az egységnyi távolságra lévő pontpárokat. Így bármely pontpárhoz legfeljebb két olyan pont tartozhat, ami mindkettővel össze van kötve (10.5. ábra). Ebből következik, hogy a gráf nem tartalmaz $K_{2,3}$-at, tehát alkalmazható a 10.3.3. állítás. □



10.5. ábra. Egy pontpárra legfeljebb két cseresznye illeszkedhet.

A legjobb ismert konstrukció Erdős nevéhez fűződik, ez nagyságrendileg $n^{1+\frac{C}{\log\log n}}$ egységtávolságot tartalmaz. A sejtés az, hogy bármely $\mathcal{E} > 0$ esetén csak $O(n^{1+\mathcal{E}})$ létezik, de sokáig nem találtak még a 10.4.1. állításban triviálisan adódó felső becslésnél sem jobbat, végül Spencer, Szemerédi és Trotter bizonyították a következő tételt.

10.4.2. Tétel (Spencer-Szemerédi-Trotter). *A síkon n pont között az egységtávolságok száma $O(n^{4/3})$.*

A tétel bizonyítását itt nem tárgyaljuk.

10.4.3. Állítás. *A térben n pont között egységtávolság $O(n^{5/3})$-szor fordulhat elő.*

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy az egységtávok által meghatározott gráf nem tartalmaz $K_{3,3}$ gráfot, így ismét használható a 10.3.3. állítás. □

10.4.4. Állítás (Lenz). *A $d \geq 4$ dimenziós térben megadható n olyan pont, amelyek $\Omega(n^2)$ egységtávolságot határoznak meg.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő az állítást $d = 4$ esetén bizonyítani. Tekintsük a következő pontokat:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1, 0, 0) \\ &\vdots \\ P_{n/2} &= (x_{n/2}, y_{n/2}, 0, 0) \\ P_{n/2+1} &= (0, 0, z_1, w_1) \\ &\vdots \\ P_n &= (0, 0, z_{n/2}, w_{n/2}), \end{aligned}$$

ahol minden $1 \leq i \leq n/2$-re legyen $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2 + w_i^2 = 1/2$. EKkor minden $1 \leq i, j \leq n/2$ esetén P_i és $P_{n/2+j}$ egységnyi távol vannak egymástól, tehát az egységtávolságok száma legalább $\lfloor n^2/4 \rfloor$. □

11. fejezet

Véges geometriák

11.1. Véges geometria fogalma és tulajdonságai

11.1.1. Definíció. *A H véges alaphalmaz $E_1, E_2, \ldots, E_m$ részhalmazainak rendszerét* **véges geometriának** *nevezzük, ha*

(1) minden $i \neq j$-re $|E_i \cap E_j| = 1$,

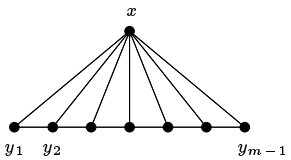
(2) minden $x, y \in H$-ra létezik olyan E_i, hogy $\{x, y\} \subseteq E_i$.

Ha (2)-ben $x \neq y$, akkor (1) miatt egyértelműen létezik az E_i halmaz.

A véges geometria elnevezést az indokolja, hogy a definícióban szereplő feltételek pontok és egyenesek illeszkedési tulajdonságainak feleltethetők meg, ezért a továbbiakban halmaz helyett az egyenes, elem helyett a pont, tartalmazás helyett pedig az illeszkedés kifejezéseket is használni fogjuk.

Triviális (elfajuló) véges geometriákról beszélünk a következő két esetben:

- $m = 1$, $E_1 = H$,
- $E_i = \{x, y_i\}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$, $E_m = \{y_1, \ldots, y_{m-1}\}$ (11.1. ábra).

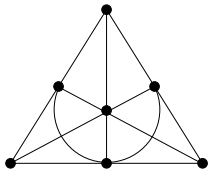


11.1. ábra. Elfajuló véges geometria.

11.1.2. Definíció. *Véges geometria valahány eleme általános helyzetű, ha közülük semelyik három nem esik ugyanabba az E_i halmazba.*

11.1.3. Definíció. *Egy véges geometria* **nem elfajuló**, *ha létezik négy általános helyzetű eleme.*

Egy nevezetes nem elfajuló példa a 11.2. ábrán látható hételemű *Fano-féle* véges geometria.



11.2. ábra. Fano-féle véges geometria.

11.1.4. Definíció. *Egy elem fokának nevezzük az őt tartalmazó E_i halmazok számát.*

11.1.5. Lemma.

(i) Ha $x \notin E_i$, akkor x foka $|E_i|$.

(ii) Ha x_1, x_2, x_3, x_4 általános helyzetű elemek, akkor van olyan q természetes szám, hogy a négy pont mindegyikének foka $q+1$, és minden általuk meghatározott egyenesre pontosan $q+1$ pont illeszkedik.

Bizonyítás.
(i) Az E_i minden pontján pontosan egy x-re illeszkedő egyenes megy át, és ezek mind különbözőek. Másrészt minden x-re illeszkedő egyenes metszi E_i-t.
(ii) Legyen $q+1$ az x_1 és x_2 által meghatározott egyenesre illeszkedő pontok száma. Az (i) alapján x_3 és x_4 foka pontosan $q+1$. Ugyanezt megismételve minden pontpárra adódik az állítás. □

11.1.6. Tétel. *Minden nem elfajuló véges geometriához van olyan q természetes szám, hogy*

(a) minden elem $q+1$ fokú,

(b) minden i-re $|E_i| = q+1$,

(c) $|H| = q^2+q+1$,

(d) $m = q^2+q+1$.

Bizonyítás.
(a) Legyenek x_1, x_2, x_3, x_4 általános helyzetű pontok. A 11.1.5. lemma (ii) pontja alapján létezik olyan q szám, hogy ezek foka $q+1$, és az általuk meghatározott egyenesekre pontosan $q+1$ pont illeszkedik. Tetszőleges, ezektől különböző $y \in H$ az x_1-en és x_2-n, illetve az x_1-en és x_3-on átmenő egyenesek közül legfeljebb az egyiken van rajta, így a lemma (i) pontja miatt y foka szintén $q+1$.
(b) Minden egyenes esetén létezik rá nem illeszkedő pont az x_1, x_2, x_3, x_4 elemek között, így minden egyenesre pontosan $q+1$ pont illeszkedik.
(c) Az (a) és (b) alapján egy rögzített elemre illeszkedő egyeneseken a pontokat összeszámolva $|H| = 1 + (q+1)q = q^2+q+1$.
(d) Az egyenesek számát megkapjuk, ha a pont-egyenes illeszkedések számát elosztjuk az egy egyenesre eső pontok számával, tehát

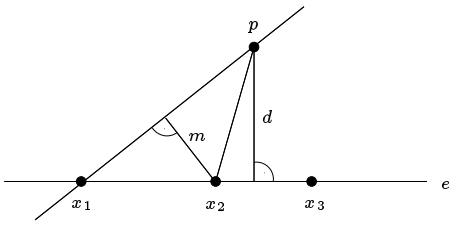
$$m = \frac{(q+1)(q^2+q+1)}{q+1} = q^2+q+1. \quad \square$$

A tételben szereplő q számot a véges geometria rendjének nevezzük.

A következő tétel azt mondja ki, hogy valódi síkbeli pontokból és egyenesekből nem készíthető véges geometria. A probléma eredetileg Sylvestertől származik; később – tőle függetlenül – Erdős vetette fel újra.

11.1.7. Tétel (Gallai). *Véges, nem kollineáris síkbeli P ponthalmaz esetén létezik olyan egyenes, amelyre pontosan két pont illeszkedik.*

Bizonyítás. Jelölje E azon egyenesek halmazát, amelyekre legalább két P-beli pont esik. Legyen $p \in P$ és $e \in E$ olyan, hogy p nem illeszkedik e-re, és távolságuk minimális (jelölje ezt a távolságot d). Tegyük fel, hogy e-re illeszkednek az x_1, x_2, x_3 pontok, és legyen ezek közül x_2 a középső (11.3. ábra). Az x_1x_2p és x_2x_3p háromszögek közül az egyikben (például



11.3. ábra. Az e-re nem eshet három pont.

az elsőben) az x_2-nél lévő belső szög legalább $90°$, tehát ebben a háromszögben az x_2-höz tartozó magasság a legkisebb. Ekkor viszont x_2 közelebb van az $\overline{x_1p}$ egyeneshez, mint p e-hez, ami ellentmondás. Így e-re csak két pont illeszkedhet. □

11.1.8. Következmény. *Síkbeli pontok és azok kollineáris részhalmazai nem alkothatnak nem elfajuló véges geometriát.*

Bizonyítás. Ha a ponthalmaz nem elfajuló véges geometriát alkot, akkor a 11.1.6. és a 11.1.7. tétel miatt $q = 1$, így a pontok száma három. Három pont viszont csak elfajuló véges geometriát alkothat. □

11.1.9. Állítás. *Ha p prímszám, akkor létezik p-edrendű nem elfajuló véges geometria.*

Bizonyítás. Vegyük a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ elemekből képzett három hosszúságú sorozatokat, de hagyjuk ki közülük a $(0,0,0)$ vektort. A maradékon definiáljuk a következő ekvivalencia-relációt:

$$(x, y, z) \sim (kx, ky, kz) \pmod{p} \qquad \text{ha } k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$$

Ez valóban ekvivalencia-reláció, melynek ekvivalencia–osztályai egyenként $p-1$ eleműek, így számuk $(p^3-1)/(p-1) = p^2+p+1$. A konstruálandó véges geometria alaphalmaza ezen ekvivalencia–osztályok halmaza lesz. Ezt a továbbiakban H-val jelöljük; az (a,b,c) hármas ekvivalencia-osztályát pedig $\overline{(a,b,c)}$-vel.

Most definiáljuk az „egyeneseket". Minden $h = \overline{(a,b,c)} \in H$-hoz legyen

$$E_h = \{\overline{(x,y,z)} \ ; \ ax + by + cz \equiv 0 \pmod{p}\}$$

E_h nyilván független attól, hogy h-t melyik (a,b,c) hármassal és az $\overline{(x,y,z)}$ osztályt melyik (x,y,z)-vel reprezentáljuk.

Annak igazolására, hogy bármely két E_h-nak pontosan egy közös (mellékosztály)eleme van és bármely két mellékosztályt tartalmazza egy alkalmas E_h, elég észrevenni, hogy $(u_1, v_1, w_1) \not\sim (u_2, v_2, w_2)$ esetén az

$$u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta \equiv 0 \pmod{p}$$
$$u_2\xi + v_2\eta + w_2\zeta \equiv 0 \pmod{p}$$

egyenletnek – a ξ, η, ζ változókban – pontosan egy szabadsági foka van. (Ezt először az $u_i = a_i,\ v_i = b_i,\ w_i = c_i$ együtthatókkal az x, y, z változókra, majd az $u_i = x_i,\ v_i = y_i,\ w_i = z_i$ együtthatókkal az a, b, c változókra alkalmazzuk.)

Végül mutatunk négy általános helyzetű „pontot", azaz mellékosztályt:

$$\overline{(1,0,0)},\ \overline{(0,1,0)},\ \overline{(0,0,1)},\ \overline{(1,1,1)}$$

könnyen ellenőrizhetően megfelel. □

Megjegyezzük, hogy $q = p^\alpha$-ra is létezik q-adrendű nem elfajuló véges geometria. (Ez abból következik, hogy létezik p^α elemű véges test, mely felett az előző konstrukció elvégezhető.)

11.2. Reimann-konstrukció

Véges geometriák segítségével konstruálunk olyan $K_{2,2}$-t (azaz 4 hosszú kört) nem tartalmazó gráfot, amelynek $cn^{3/2}$ éle van, vagyis belátjuk, hogy a 10.3.2. állításban szereplő felső becslés egyben a pontos nagyságrend is.

11.2.1. Állítás. *Létezik olyan $c > 0$ szám, amelyre minden n esetén*

$$ext(n, K_{2,2}) \geq cn^{3/2}.$$

Bizonyítás (Reimann-konstrukció). Feltehető, hogy $n/2 = p^2 + p + 1$, ahol p prímszám. Ekkor a 11.1.9. állítás alapján létezik p-edrendű nem elfajuló véges geometria. A véges geometria pontjait illetve egyeneseit feleltessük meg egy páros gráf két csúcshalmazának. Az x pontot akkor és csak akkor kössük össze az E_i egyenessel, ha $x \in E_i$. Az így keletkező gráf nem tartalmaz $K_{2,2}$-t, hiszen bármely két pontra csak egy egyenes illeszkedik. A gráf csúcsainak száma

$$n = 2(p^2 + p + 1) \sim p^2,$$

éleinek száma pedig

$$e = (p^2 + p + 1)(p + 1) \sim p^3 \sim n^{3/2}. \quad \square$$

12. fejezet

Minimax tételek

Olyan állításokat szokás „minimax tételeknek" nevezni, amelyek egy mennyiség minimumának és egy másik mennyiség maximumának egyenlőségét mondják ki (pl. a 12.1.5. Kőnig-tétel).

12.1. Kőnig-tétel

Tekintsük a $G(V_1, V_2, E)$ páros gráfot. A 3.2.4. tétel alapján a gráf akkor és csak akkor tartalmaz $|V_1|$ független élt, ha minden $X \subseteq V_1$ esetén $|\Gamma(X)| \geq |X|$, ahol $\Gamma(X)$ az X csúcshalmaz szomszédait jelöli.

Legyen $d \geq 0$ egész szám. A tétel általánosításaként az előzőhöz hasonló, szükséges és elégséges feltételt adunk $|V_1| - d$ független él létezésére.

12.1.1. Tétel (deficites Hall-tétel). *A $G(V_1, V_2, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik $|V_1| - d$ független él, ha minden $X \subseteq V_1$ esetén $|\Gamma(X)| \geq |X| - d$.*

Bizonyítás. Vegyünk hozzá V_2-höz d új csúcsot, és ezek mindegyikét kössük össze V_1 minden csúcsával. Az így keletkező páros gráfot jelölje $G'(V_1, V_2', E')$. A 3.2.4. tétel miatt ekvivalensek a következő állítások:
(1) G-ben létezik $|V_1| - d$ független él.
(2) G'-ben létezik $|V_1|$ független él.
(3) Minden $X \subseteq V_1$ esetén $|\Gamma'(X)| \geq |X|$.
(4) Minden $X \subseteq V_1$ esetén $|\Gamma(X)| \geq |X| - d$. □

12.1.2. Definíció. *A $def(X) := |X| - |\Gamma(X)|$ mennyiséget X* **deficitjének** *nevezzük.*

12.1.3. Következmény. *A független élek maximális száma*

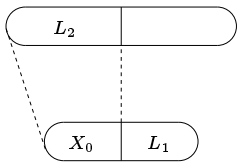
$$|V_1| - \max_{X \subseteq V_1} def(X).$$

12.1.4. Definíció. *Gráf csúcsainak egy részhalmaza* **lefogó ponthalmaz**, *ha minden élnek legalább egyik végpontja szerepel benne.*

12.1.5. Tétel (Kőnig). *Páros gráfban a független élek maximális száma megegyezik a lefogó pontok minimális számával.*

Bizonyítás. Az összes él lefogásához nyilván szükséges legalább annyi pont, mint a független élek maximális száma. Elegendő tehát belátni, hogy létezik olyan F független élrendszer és L lefogó ponthalmaz, melyre $|F| \geq |L|$.

Legyen X_0 olyan V_1-beli ponthalmaz, amelyre $\mathrm{def}(X_0)$ maximális. Ekkor a deficites Hall-tétel miatt létezik $|V_1| - \mathrm{def}(X_0)$ élű F független élrendszer. Legyen $L_1 = V_1 - X_0$ és $L_2 = \Gamma(X_0)$ (12.1. ábra). Az $L = L_1 \cup L_2$ ponthalmaz lefogó, mert X_0-ból csak L_2-be megy



12.1. ábra. $L_1 \cup L_2$ lefogó ponthalmaz.

él. Mivel

$$|L| = |L_1| + |L_2| = |V_1| - |X_0| + |\Gamma(X_0)| = |V_1| - \mathrm{def}(X_0) = |F|,$$

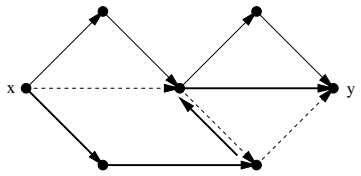
a tételt bebizonyítottuk. □

12.2. Menger-tételek

12.2.1. Tétel („irányított él-Menger"-tétel). *Legyen $\vec{G}(V, \vec{E})$ irányított gráf, és $x, y \in V$. Ekkor a közös él nélküli irányított $x \to y$ utak maximális száma megegyezik az összes $x \to y$ irányított utat szétvágó élek minimális számával.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz a javító utak fogalmára és egy rájuk vonatkozó lemmára.

12.2.2. Definíció. *A nem feltétlenül irányított S $x \to y$ út a $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ független $x \to y$ útrendszerre nézve* **javító út**, *ha a $\mathcal{P}$-n kívüli élek az eredeti, a $\mathcal{P}$-beliek pedig ellentétes irányítás szerint szerepelnek benne.*



12.2. ábra. Javító út.

A 12.2. ábrán a folytonos és szaggatott utak alkotják a kételemű független útrendszert, amelyre nézve a vastag vonallal jelölt út javító út.

12.2.3. Lemma. *Legyenek $P_1, \ldots, P_k$ független $x \to y$ utak. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) $P_1, \ldots, P_k$ maximális.

(2) Nem létezik $x \to y$ javító út $P_1, \ldots, P_k$-ra nézve.

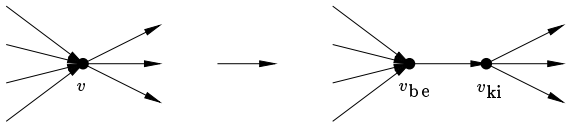
(3) Létezik k (x-et és y-t) szétvágó él.

Bizonyítás.
(1) $\Rightarrow$ (2) Tegyük fel, hogy létezik S javító út. Vegyük hozzá S-et a $P_1, \ldots, P_k$ utakhoz, majd dobjuk ki az oda-vissza (egyszer S-ben, egyszer egy P_i-ben) használt éleket! A maradékban minden él csak egyszer szerepelhet, és ez tartalmaz $k+1$ irányított $x \to y$ sétát (ezek x-ből indulva szabadon építhetők). Egyben $k+1$ független utat is kapunk, ami ellentmondás.
(2) $\Rightarrow$ (3) Jelölje V_0 az x-ből javító (rész)úton elérhető pontok halmazát. Ekkor egyrészt a V_0-ból $V - V_0$-ba vezető élek (amelyek nyilván elvágó élhalmazt alkotnak) csak $P_1 \cup \ldots \cup P_k$-beliek lehetnek, másrészt $V - V_0$-ból V_0-ba nem mehet $P_1 \cup \ldots \cup P_k$-beli él (mindkét esetben létezne javító út $V - V_0$-ba). Tehát a V_0-ból $V - V_0$-ba vezető élek között minden P_i-ből pontosan egy szerepel, így az elvágó élhalmaz k elemű.
(3) $\Rightarrow$ (1) Ha y-t k éllel el lehet vágni x-től, akkor a gráf nyilván nem tartalmazhat $k+1$ független $x \to y$ utat. □

A tétel bizonyítása. Jelölje $n^e_{\max}(\vec{G})$ a független utak maximális számát, $n^e_{\min}(\vec{G})$ pedig az elvágó élek minimális számát. Nyilván $n^e_{\max}(\vec{G}) \le n^e_{\min}(\vec{G})$. Másrészt a lemma (1) $\Rightarrow$ (3) állítása szerint $n^e_{\max}(\vec{G})$ él elegendő is x és y szétvágásához, tehát $n^e_{\max}(\vec{G}) \ge n^e_{\min}(\vec{G})$. □

12.2.4. Tétel („irányított pont-Menger"-tétel). *Legyen $\vec{G}(V, \vec{E})$ irányított gráf, és $x, y \in V$. Közös belső csúcs nélküli irányított $x \to y$ utak maximális száma megegyezik az összes $x \to y$ irányított utat szétvágó pontok minimális számával.*

Bizonyítás. A $\vec{G}(V, \vec{E})$ gráfhoz hozzárendeljük a $\vec{G}'(V', \vec{E}')$ gráfot oly módon, hogy minden $v \in V - \{x, y\}$ csúcsot helyettesítünk egy v_{be} és egy v_{ki} csúccsal a 12.3. ábrának megfelelően. Vezessük be a $n^p_{\max}(\vec{G})$ és $n^p_{\min}(\vec{G})$ jelöléseket a közös belső csúcs nélküli utak maximális



12.3. ábra.
Az „irányított pont-Menger"-tétel visszavezetése az „irányított él-Menger"-tételre.

számára, illetve az $x \to y$ utakat szétvágó pontok minimális számára. Könnyen belátható, hogy $n^p_{\max}(\vec{G}) = n^e_{\max}(\vec{G}')$ és $n^p_{\min}(\vec{G}) = n^e_{\min}(\vec{G}')$. Mivel a 12.2.1. tétel alapján $n^e_{\max}(\vec{G}') = n^e_{\min}(\vec{G}')$, azt is beláttuk, hogy $n^p_{\max}(\vec{G}) = n^p_{\min}(\vec{G})$. □

12.2.5. Tétel („irányítatlan él-Menger"-tétel). *Legyen $G(V, E)$ irányítatlan gráf és $x, y \in V$. Ekkor a közös él nélküli $x - y$ utak maximális száma megegyezik az összes $x - y$ utat szétvágó élek minimális számával.*

Bizonyítás. A $G(V, E)$ gráfhoz hozzárendeljük a $\vec{G}'(V, \vec{E}')$ irányított gráfot oly módon, hogy minden irányítatlan élt két, ugyanazon csúcsot összekötő, ellentétes irányú irányított éllel helyettesítünk. Ekkor belátható, hogy $n^e_{\max}(G) = n^e_{\max}(\vec{G}')$ és $n^e_{\min}(G) = n^e_{\min}(\vec{G}')$. A a 12.2.1. tétel miatt ebből következik, hogy $n^e_{\max}(G) = n^e_{\min}(G)$. □

12.2.6. Következmény. *G akkor és csak akkor k-szorosan él-összefüggő, ha minden $x, y \in V$ között létezik k közös él nélküli út.*

12.2.7. Tétel („irányítatlan pont-Menger"-tétel). *Legyen $G(V,E)$ irányítatlan gráf és $x,y \in V$. Ekkor a közös belső csúcs nélküli $x-y$ utak maximális száma megegyezik az összes $x-y$ utat szétvágó pontok minimális számával.*

Bizonyítás. A tétel az irányított esethez hasonlóan visszavezethető az „irányítatlan él-Menger"-tételre. □

12.2.8. Következmény. *G akkor és csak akkor k-szorosan pont-összefüggő, ha minden $x,y \in V$ között létezik k közös belső csúcs nélküli út.*

12.3. Max-vissza keresés

Ebben a fejezetben először egy gráf csúcsainak max-vissza sorrendjét definiáljuk, majd algoritmust adunk ennek meghatározására (ezt a 12.4. fejezetben használjuk majd).

12.3.1. Definíció. *Legyen $G(V,E)$ irányítatlan gráf, amely tartalmazhat többszörös éleket is. A gráf csúcsainak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ számozása* **max-vissza sorrend**, *ha minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén v_i-ből legalább annyi él indul $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$-be, mint v_j-ből.*

Ahhoz, hogy algoritmust készítsünk a max-vissza sorrend meghatározására, mindenekelőtt megfelelő adattárolási módot kell találnunk. Mind a csúcsmátrixok, mind az éllisták alkalmasak többszörös élt is tartalmazó gráfok tárolására. A csúcsmátrix egy rekeszében a 0 és 1 számok helyett most tároljuk azt, hogy a két csúcs hány éllel van összekötve, éllisták esetén pedig ugyanezt az értéket a listaelemekben a csúcs sorszáma mellett egy új mezőben tárolhatjuk.

Max-vissza keresés I.

Tegyük fel, hogy már meghatároztuk a max-vissza sorrend első $i-1$ elemét, azaz a $v_1, \ldots, v_{i-1}$ csúcsokat, és a még ki nem választott j csúcsok esetén a *vissza(j)* tömbben tároltuk, hány él vezet v_j-ből $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$-be. Ekkor azt a csúcsot kell v_i-nek választanunk, ahol a tömbben a legnagyobb érték szerepel (ha több ilyen is van, akkor ezek közül tetszőlegeset). Ezután a kiválasztott csúcs ismeretében könnyen elvégezhető a tömb frissítése. Az algoritmus lépései:

1. Kezdetben minden $1 \leq j \leq n$-re $vissza(j) = 0$.
2. n-szer hajtsuk végre:
   - v_i legyen a maximális $vissza(j)$ értékű csúcs a még ki nem választottak közül.
   - A még ki nem választott csúcsokra: $vissza(j) := vissza(j) + v_i$ és j közötti élek száma.

Az n maximumválasztás $O(n^2)$ időt igényel. Csúcsmátrix esetén a *vissza* tömb frissítése az algoritmus folyamán összesen $O(n^2)$ ideig tart. Éllisták esetén ez $O(e)$, ahol e a multiplicitás nélküli élszámot jelöli (a többszörös élek is csak egy élnek számítanak). Az algoritmus tehát mindkét tárolási mód esetén $O(n^2)$ futási idejű.

Max-vissza keresés II.

Ha a *vissza(j)* értékeket maximum kupacban tároljuk (a szülő nagyobb vagy egyenlő a gyerekeinél), akkor egy maximumválasztás $O(\log n)$ időben is elvégezhető. Éllistás tárolás

esetén a *vissza* tömb frissítései során összesen $O(e)$ növelést kell a kupacban végrehajtani, így a teljes lépésszám $O((n+e)\log n)$.

Max-vissza keresés III. (vödör-módszer)

A csúcsokat most e^*+1 vödörben is tároljuk, ahol e^* a gráf tényleges élszámát jelöli. Legyenek a vödrök sorszámozva 0-tól e^*-ig. Ha egy adott pillanatban $vissza(j)=t$, akkor j a t-edik vödörben található. Egy vödrön belül a csúcsokat kétszeresen láncolt listában tartjuk, és minden csúcs esetén nyilvántartunk egy mutatót is a vödörbeli listaelemre. Emellett a *max_nem_üres* mutató mutasson mindig a legnagyobb sorszámú nem üres vödörre. Az algoritmus lépései:

1. Kezdetben minden $1 \le j \le n$-re $vissza(j)=0$, minden csúcs a 0. vödörben van, $max_nem_üres = 0$.
2. Minden $1 \le i \le n$-re:
   - v_i legyen a *max_nem_üres* vödör első eleme.
   - v_i minden j szomszédjára:
     - *vissza*(j) frissítése,
     - j áthelyezése másik vödörbe (közben, ha szükséges, *max_nem_üres* átírása),
   - Ha a *max_nem_üres* vödör kiürült, új nem üres vödör keresése **visszafelé**.

Jelölje $\deg^*(v_i)$ v_i fokszámát, illetve $\deg(v_i)$ v_i szomszédjainak számát. A v_i meghatározása most konstans időben történik, v_i csúcs szomszédjainak frissítése $\deg(v_i)$ időt igényel, új nem üres vödör kereséséhez pedig legfeljebb $\deg^*(v_i)$ visszalépést kell végrehajtanunk, hiszen a v_i csúcsot tartalmazó vödör sorszáma legfeljebb $\deg^*(v_i)$. Így az algoritmus összesen $O(e^*)$ futási idejű.

12.4. Él-összefüggőségi szám meghatározása

12.4.1. Definíció. *Egy gráf él-összefüggőségi számán azt a lehető legnagyobb k számot értjük, melyre igaz, hogy a gráf k-szorosan él-összefüggő.*

Legyen adott egy $G(V,E)$ irányítatlan gráf, amely tartalmazhat többszörös éleket is. Keresendő G él-összefüggőségi száma.

12.4.2. Lemma (Nagamochi-Ibaraki). *Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ max-vissza sorrend, akkor a v_{n-1} és v_n közötti utak szétvágásához legalább $\deg^*(v_n)$ élt kell elhagyni.*

Bizonyítás (Frank András). Teljes indukciót alkalmazunk n szerint. Az $n=2$ eset triviális. Tegyük fel, hogy a lemma $n-1$ csúcs esetén teljesül. A $v_{n-1}-v_n$ utak szétvágásához nyilván el kell hagyni az összes $v_{n-1}-v_n$ élt (ezek számát jelöljük s-sel). Ennek az s élnek a törlésével keletkező G' gráfban v_n foka $\deg^*(v_n)-s$. Ha G'-ből kevesebb, mint $\deg^*(v_n)-s$ élt hagyunk el, akkor az indukciós feltétel miatt marad $v_{n-2}-v_n$ út, hiszen $v_1,\ldots,v_{n-2},v_n$ max-vissza sorrendje $G-\{v_{n-1}\}$-nek. Hasonlóan marad $v_{n-2}-v_{n-1}$ út is, mert $v_1,\ldots,v_{n-2},v_{n-1}$ max-vissza sorrendje $G-\{v_n\}$-nek. Tehát kevesebb, mint $\deg^*(v_n)$ él elhagyása után a G gráfban marad $v_{n-1}-v_n$ séta, és így $v_{n-1}-v_n$ út is. □

Nyilvánvaló, hogy $\deg^*(v_n)$ él (v_n-re illeszkedő élek) elhagyása elegendő is. A lemma tehát azt mondja ki, hogy ennél kevesebb él elhagyásával nem oldható meg v_{n-1} és v_n szétvágása.

Az él-összefüggőségi számot max-vissza keresés segítségével a következőképpen határozhatjuk meg:

1. $G' := G$.
2. Minden $t = n, n-1, \ldots, 2$-re:
   - Meghatározzuk G'-nek egy $v_1, v_2, \ldots, v_t$ max-vissza sorrendjét.
   - Megjegyezzük a $\deg^*(v_t)$ értéket.
   - G'-ben összehúzzuk a v_{t-1} és v_t csúcsokat.

12.4.3. Állítás. *Az algoritmus alapján adódó* $\min_{2\le t\le n} \deg^*(v_t)$ *érték* G *él-összefüggőségi száma.*

Bizonyítás. Legyen $\min_{2\le t\le n} \deg^*(v_t) = \deg^*(v_i)$, és tekintsük az algoritmus végrehajtásának azt a pillanatát, amikor $t = i$. Ekkor a v_i-be korábban összehúzott csúcsok és a többi csúcs között pontosan $\deg^*(v_i)$ él halad, ezért ezen élek elhagyásával G szétvágható. Így elegendő azt megmutatnunk, hogy kevesebb él nem vágja szét a gráfot.

Teljes indukciót alkalmazunk n szerint. Az állítás $n = 2$ esetén teljesül. Tegyük fel, hogy $n-1$-re is igaz, legyen $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ G max-vissza sorrendje, és hagyjunk el a gráfból $k < \min_{2\le t\le n} \deg^*(v_t)$ élt. Mivel $k < \deg^*(v_n)$, a 12.4.2. lemma alapján v_{n-1} és v_n között létezik út. Tekintsük a G-ből v_{n-1} és v_n összehúzásával keletkező $n-1$ csúcsú G_1 gráfot. A G_1 gráfra az algoritmust futtatva a $\min_{2\le t\le n-1} \deg^*(v_t)$ értéket kapjuk eredményül, így

$$k < \min_{2\le t\le n} \deg^*(v_t) \le \min_{2\le t\le n-1} \deg^*(v_t)$$

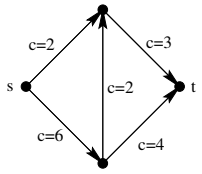
miatt G_1-re alkalmazható az indukciós feltétel, tehát a k él elhagyása G_1-et sem vágja szét. Mivel v_{n-1} és v_n között van út, a k él G-t sem vágja szét. □

Jelenleg sem gráfok pont-összefüggőségi számának meghatározására, sem irányított gráfok esetén él-összefüggőségi szám meghatározására nem ismert hasonló jellegű algoritmus. Általánosabb (s ezért sajnos lassabb) módszert a következő szakaszban láthatunk.

12.5. Hálózati folyamok

12.5.1. Definíció. *Legyen* $\vec{G}(V, \vec{E})$ *irányított gráf,* $s, v \in V$, *és tekintsünk egy* $c : \vec{E} \to \mathbb{R}^+$ *függvényt. Ekkor a* $\vec{G}$ *gráfot* **hálózatnak** *nevezzük, ahol* s *a forrás,* t *a nyelő,* c *pedig a hálózat kapacitása.*

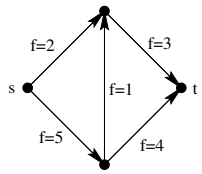
A 12.4. ábra egy hálózatot szemléltet.



12.4. ábra. Hálózat.

12.5.2. Definíció. *Az $f : \vec{E} \to \mathbb{R}_0^+$ függvényt* **hálózati folyamnak** *nevezzük, ha minden $e \in \vec{E}$ esetén $0 \leq f(e) \leq c(e)$, és minden $v \in V - \{s,t\}$ esetén* $\sum_{(v,x)\in\vec{E}} f(v,x) = \sum_{(y,v)\in\vec{E}} f(y,v)$.

Egy vízhálózat esetén például az élek legfeljebb annyi vizet szállíthatnak, mint az él kapacitása, és a belső csomópontokból pontosan annyi víz folyik ki, mint amennyi befolyik. A 12.5. ábrán egy, az előző hálózathoz tartozó folyam látható.



12.5. ábra. Hálózati folyam.

12.5.3. Állítás. *Ha $\vec{G}$ nem tartalmaz s-be érkező és t-ből induló éleket, akkor*

$$\sum_{(s,y)\in\vec{E}} f(s,y) = \sum_{(x,t)\in\vec{E}} f(x,t).$$

Bizonyítás. Az összes élen folyó mennyiséget kétféleképpen összeszámolva adódik a következő egyenlőség:

$$\sum_{(s,y)\in\vec{E}} f(s,y) + \sum_{x\neq s}\sum_{(x,y)\in\vec{E}} f(x,y) = \sum_{(x,t)\in\vec{E}} f(x,t) + \sum_{y\neq t}\sum_{(x,y)\in\vec{E}} f(x,y).$$

A folyam definíciójában a csomópontokra vonatkozó feltételből pedig:

$$\sum_{x\neq s}\sum_{(x,y)\in\vec{E}} f(x,y) = \sum_{y\neq t}\sum_{(x,y)\in\vec{E}} f(x,y).$$

Az első egyenletből a másodikat kivonva a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk. □

12.5.4. Definíció. *A* $\sum_{(s,y)\in\vec{E}} f(s,y) = \sum_{(x,t)\in\vec{E}} f(x,t)$ *mennyiséget a* **folyam értékének** *nevezzük és $F(f)$-fel jelöljük.*

12.5.5. Definíció. *Az (S,T) csúcshalmazpár* **vágás**, *ha $s \in S$, $t \in T$, $S \cap T = \emptyset$ és $S \cup T = V$.*

12.5.6. Definíció. *A* $C(S,T) = \sum_{x\in S, y\in T} c(x,y)$ *mennyiséget a* **vágás kapacitásának** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy egy folyam értéke nem lehet nagyobb a hálózat tetszőleges vágásának kapacitásánál. A következő tétel ennél többet is mond a folyamérték és a vágás kapacitása közötti összefüggésről.

12.5.7. Tétel (Ford-Fulkerson). *Tetszőleges hálózatnak létezik maximális folyama, és*

$$\max_f F(f) = \min_{(S,T)} C(S,T).$$

A tétel bizonyításához többek között szükségünk lesz a következő, könnyen belátható állításra.

12.5.8. Állítás. *Tetszőleges f folyamra és (S,T) vágásra*

$$F(f) = \sum_{x\in S, y\in T} f(x,y) - \sum_{x\in S, y\in T} f(y,x).$$

12.5.9. Definíció. *Egy nem feltétlenül irányított $x-y$ utat* **javító útnak** *nevezünk, ha az úton s-ből t-be haladva az előre mutató éleken $f(e) < c(e)$, a vissza mutató éleken pedig $f(e) > 0$.*

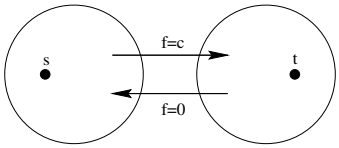
12.5.10. Lemma. *A következő állítások ekvivalensek:*

(1) Az f folyam maximális.

(2) Nem létezik $s-t$ javító út.

(3) Létezik (S,T) vágás, melyre $C(S,T) = F(f)$.

Bizonyítás.
(1) $\Rightarrow$ (2) Ha a gráf tartalmaz javító utat, akkor a folyam értéke növelhető oly módon, hogy az út előre mutató élein növeljük, vissza mutató élein pedig csökkentjük a szállított mennyiséget alkalmas $\mathcal{E} > 0$ értékkel.
(2) $\Rightarrow$ (3) Legyen S az s-ből javító (rész)úton elérhető csúcsok halmaza, T pedig tartalmazza a fennmaradó csúcsokat. Ekkor az S-ből T-be mutató éleket maximális kapacitással hasz-



12.6. ábra. $C(S,T) = F(f)$.

náljuk, a T-ből S-be mutató éleken pedig nem folyik semmi (12.6. ábra), így a 12.5.8. állítás alapján

$$F(f) = \sum_{x\in S, y\in T} f(x,y) = \sum_{x\in S, y\in T} c(x,y) = C(S,T).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Triviális. □

12.5.11. Lemma (egész folyam lemmája). *Ha minden él kapacitása egész szám, akkor létezik maximális folyam, sőt létezik olyan maximális folyam is, amelyben minden élen a szállított mennyiség egész.*

Bizonyítás. Induljunk ki az $f = 0$ folyamból, és amíg lehetséges, növeljük a folyamot egy L javító út mentén a lehető legnagyobb értékkel. A folyamérték növekménye ekkor

$$\min\Big\{ \min\{c(e) - f(e) \mid \text{e előre mutató éle } L\text{-nek}\},\ \min\{f(e) \mid \text{e vissza mutató éle } L\text{-nek}\}\Big\}.$$

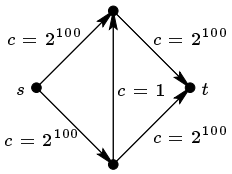
Ez egy pozitív egész szám, ezért a folyamérték ily módon csak véges sok lépésben növelhető, továbbá a szállított mennyiség az éleken mindvégig egész lesz. Ha a gráf nem tartalmaz további javító utat, akkor a 12.5.10. lemma miatt a folyam maximális. □

Az előző két lemmából a 12.5.7. tétel már igazolható **egész kapacitású** hálózatok esetére. Általános (valós kapacitású) hálózatokhoz egy kevés analízist is használnunk kell.

A Ford-Fulkerson tétel bizonyítása. Legyen m a gráf éleinek száma. Jelölje $c_1, c_2, \ldots, c_m$ az élek kapacitásait, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pedig az éleken szállított mennyiségeket. A folyamokra vonatkozó feltételek a következő egyenlőtlenségeket jelentik az x_i változókra:

1. Minden $0 \leq i \leq m$ esetén $0 \leq x_i \leq c_i$.
2. Minden csúcsra: $\sum_{i \text{ bejövő él}} x_i = \sum_{j \text{ kimenő él}} x_j$.

A folyam értéke $\sum_{i\ s\text{-ből indul}} x_i$, amely az $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ vektor folytonos függvénye. Az 1. és 2. feltételek alapján ennek a függvénynek az értelmezési tartománya korlátos és zárt, továbbá nem üres, hiszen tartalmazza a nullvektort, így a Bolzano-Weierstrass tétel szerint létezik maximuma, tehát létezik maximális folyam. □



12.7. ábra. Példa javító út kedvezőtlen választására.

A 12.7. ábrán látható hálózatban, ha minden alkalommal a három élű javító utat választjuk, akkor csak 2^{101} lépésben találjuk meg a maximális folyamot, holott kettő hosszúságú javító utat választva két lépésben is eljuthatnánk hozzá. A következő, itt nem bizonyított lemma a kapacitástól független felső korlátot ad a szükséges javítások számára, amennyiben minden lépésben egy **legrövidebb** javító utat választunk.

12.5.12. Lemma (Edmonds-Karp). *Ha minden lépésben egy legrövidebb javító utat választunk, akkor egy úthossz legfeljebb m-szer fordul elő.*

A lemma alapján a maximális folyam meghatározásához szükséges javítások száma legfeljebb $m \cdot n$.

Most már csak az a kérdés, hogyan határozhatjuk meg a legrövidebb $s - t$ javító utat. Tartsunk nyilván egy úgynevezett javító gráfot, amely az eredeti irányítással tartalmazza azokat az éleket, ahol $f(e) < c(e)$, és ellentétes irányítással azokat, ahol $f(e) > 0$. A legrövidebb javító út ebben a gráfban szélességi kereséssel $O(m)$ időben meghatározható, amennyiben éllistás tárolást alkalmazunk. Így a maximális folyamot $O(m^2 n)$ lépésben állíthatjuk elő. Megjegyezzük, hogy a legjobb ismert algoritmus lépésszáma $O(mn \log \frac{n^2}{m})$.

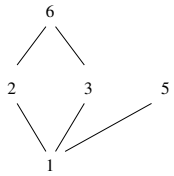
Vegyük észre azt is, hogy a Ford-Fulkerson tételből és az egész folyam lemmájából következik az „irányított él-Menger" tétel. Legyen ugyanis $\vec{G}$-ben minden él kapacitása 1. Az egész folyam lemmája alapján létezik maximális folyam, amelyben minden élen a szállított mennyiség 0 vagy 1. Ha a maximális folyam értéke k, akkor egyrészt létezik k elvágó él (az (S, T) minimális vágás esetén az S-ből T-be haladó élek), másrészt létezik k független $s \to t$ út, hiszen a maximális folyamot k darab $s \to t$ séta alkotja, amelyekből a köröket elhagyva független utakat kapunk.

12.6. Részben rendezett halmazok

12.6.1. Definíció. *A H véges halmaz a $\prec$ relációra nézve* **részben rendezett**, *ha $\prec$*

- *irreflexív (minden $x \in H$ esetén $x \not\prec x$),*
- *tranzitív (minden $x, y, z \in H$ esetén ha $x \prec y$ és $y \prec z$, akkor $x \prec z$.*

Példaként tekintsük a $H = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ halmazt, és legyen $x \prec y$ akkor és csak akkor, ha x valódi osztója y-nak és $x \neq y$. A 12.8. ábrán a vonallal összekötött elempárok esetén



12.8. ábra. Részben rendezett halmaz.

mindig a feljebb elhelyezkedő a nagyobb. Itt nem jelöltük azokat a relációkat, ahol van egy közbülső elem, amely az egyiknél nagyobb, a másiknál pedig kisebb, hiszen az ilyen párok a tranzitivitás miatt mindenképp relációban állnak egymással.

12.6.2. Definíció. *Egy elem* **maximális (minimális)**, *ha nem létezik nála nagyobb (kisebb).*

12.6.3. Definíció. *Egy elem* **legnagyobb (legkisebb)**, *ha minden más elemnél nagyobb (kisebb).*

Az előző példában az 5 és a 6 maximális elemek, az 1 pedig minimális és legkisebb elem, legnagyobb eleme viszont nincs a halmaznak.

12.6.4. Definíció. *H teljesen rendezett részhalmazait* **láncoknak**, *teljesen rendezetlen részhalmazait pedig* **antiláncoknak** *nevezzük.*

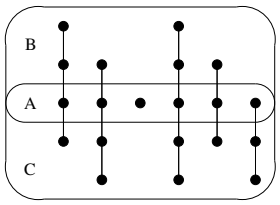
A példában az $\{1, 2, 6\}$ halmaz egy lánc, a $\{2, 3, 5\}$ halmaz pedig egy antilánc. A **láncfelbontás** H diszjunkt láncokra osztását jelenti, egy láncfelbontás mérete pedig legyen ezen diszjunkt láncoknak a száma.

12.6.5. Tétel (Dilworth). *Részben rendezett halmazban a legnagyobb antilánc mérete megegyezik a minimális láncfelbontás méretével.*

Bizonyítás. Legyen A egy maximális méretű antilánc. Nyilvánvaló, hogy H-t nem lehet $|A|$-nál kevesebb láncra felbontani, tehát elegendő belátnunk, hogy H felbontható $|A|$ darab láncra.

Alkalmazzunk teljes indukciót H elemszáma (n) szerint. Az $n = 2$ eset triviális. Tegyük fel, hogy a tétel igaz n-nél kisebb elemszámú halmazokra. Különböztessük meg a következő eseteket:

1. eset: Létezik olyan legnagyobb méretű A antilánc, hogy egy x elem kisebb A valamely eleménél, és egy y elem nagyobb A valamely eleménél (12.9. ábra).



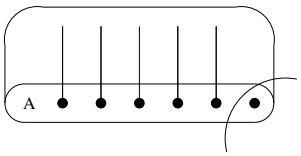
12.9. ábra. 1. eset.

Nyilván nem létezhet olyan elem, amely nagyobb A egy eleménél, és kisebb A egy másik eleménél, hiszen ekkor az antilánc ezen két eleme is relációban állna egymással. Jelölje B az A „feletti", C pedig az A „alatti" elemeket. A feltételünk miatt sem $A \cup B$, sem $A \cup C$ nem egyezik meg H-val, tehát alkalmazható rájuk az indukciós feltétel. Az A nyilván legnagyobb méretű antiláncа $A \cup B$-nek és $A \cup C$-nek is, tehát mindkét halmazban a minimális láncfelbontás mérete $|A|$. A 12.9. ábra csak ezen láncfelbontásoknak megfelelő relációkat tartalmazza, természetesen további párok is állhatnak relációban. Egyesítsük a közös A-beli elemmel rendelkező láncpárokat! Így H-nak A darab láncból álló felbontását kapjuk.

2. eset: Nem létezik az 1. esetbeli antilánc.

2/a eset: Csak olyan maximális méretű antilánc létezik, amelyhez képest minden más elem „felül" helyezkedik el.

Ekkor pontosan egy ilyen antilánc létezik, méghozzá a minimális elemek halmaza (12.10. ábra). Legyen a_1 tetszőleges A-beli elem. Alkalmazzuk az indukciós feltételt a $H - \{a_1\}$ halmazra.



12.10. ábra. 2/a eset.

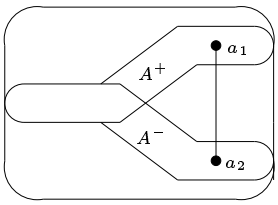
Mivel H-ban A az egyetlen maximális antilánc, $H - \{a_1\}$ maximális antiláncának mérete, és így a minimális láncfelbontás mérete is $|A| - 1$. Ehhez a_1-et hozzávéve H-nak $|A|$ darab láncból álló felbontását kapjuk.

2/b eset: Csak olyan maximális méretű antilánc létezik, amelyhez képest minden más elem „alul" helyezkedik el.

Ez az eset a 2/a-hoz hasonlóan bizonyítható.

2/c eset: Két maximális antilánc létezik, a maximális elemek halmaza (A^+), és a minimális elemek halmaza (A^-) (12.11. ábra).

Legyen $a_1 \in A^+ - A^-$. Ekkor létezik a_1-nél kisebb $a_2 \in A^- - A^+$ elem, különben a_1 hozzávehető lenne az A^- maximális méretű antilánchoz. Most alkalmazzuk az indukciós feltételt $H - \{a_1, a_2\}$-re. Ennek a halmaznak $|A| - 1$ elemű a maximális antiláncа, ezért felbontható $|A| - 1$ láncra. Ezekhez az $\{a_1, a_2\}$ láncot hozzávéve $|A|$ méretű felbontását kapjuk H-nak. □



12.11. ábra. 2/c eset.

Ütemezési feladat: A H halmaz elemei legyenek most egységnyi idő alatt elvégezhető részfeladatok, az $x \prec y$ reláció pedig jelentse azt, hogy x-et mindenképp y előtt kell végrehajtani. Ütemezésnek nevezzük részfeladatok olyan végrehajtási tervét, amelyben minden részfeladathoz megadjuk, hogy azt hányadik időegységben hajtjuk végre (egyszerre több részfeladat is végrehajtható). Keresendő egy minimális számú időegységet igénylő ütemezés.

Az egy időegység alatt végrehajtandó részfeladatok antiláncot alkotnak, tehát az ütemezés egy antilánc-felbontásnak felel meg, így nyilván ezek közül egy minimális lesz a legjobb ütemezés. A most következő tétel (amely az előzőnek duálisa) azt mondja ki, hogy a legjobb ütemezés végrehajtási ideje megegyezik a maximális láncmérettel.

12.6.6. Tétel („duális Dilworth"). *A maximális láncméret megegyezik a minimális antilánc-felbontás méretével.*

Bizonyítás. Legyen L egy maximális lánc. Nyilvánvaló, hogy H-t nem lehet $|L|$-nél kevesebb antiláncra felbontani, tehát elegendő belátnunk, hogy H-nak létezik antilánc-felbontása, melynek mérete $|L|$.

Legyen A_1 azon részfeladatok halmaza, amelyeket nem kell, hogy megelőzzön semelyik másik részfeladat. Az A_2-be kerüljenek azok, amelyek az A_1-beliek elvégzésével végrehajthatóvá válnak. Az A_3-ba tegyük azokat, amelyek az A_1 és A_2-beli részfeladatok végrehatjtása után következhetnek. Ezt az eljárást folytatva H-nak egy antilánc-felbontását kapjuk, melyben minden A_{i+1} halmaz minden eleme relációban áll az A_i halmaz valamely elemével. Így a legnagyobb indexű halmaz tetszőleges eleméből visszafelé lépegetve A_1-be, megadható egy (maximális) lánc, melynek mérete megegyezik a halmazok számával. Tehát a kapott antilánc-felbontás mérete valóban $|L|$. □

13. fejezet

Extremális halmazrendszerek

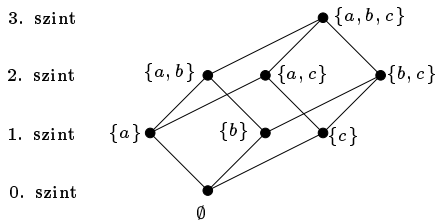
Ez a fejezet *Babai-Frankl: Linear Algebra Methods in Combinatorics* c. kitűnő könyvén alapul.

13.1. Klasszikus extremális halmazrendszerek

Legyen H egy n elemű alaphalmaz. Az $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$ halmazrendszert egy bizonyos tulajdonságra nézve extremálisnak nevezzük, ha az őt alkotó halmazok száma maximális az ilyen tulajdonságú halmazrendszerek között. A továbbiakban célunk annak meghatározása lesz, hogy adott tulajdonságoknak megfelelő halmazrendszerek legfeljebb hány halmazból állhatnak.

13.1.1. Tétel (Sperner). *Legyen $|H| = n$ és $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$. Ha minden $i \neq j$ esetén $A_i \not\subseteq A_j$, akkor $m \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha vagy n páros, és minden i esetén $|A_i| = n/2$, vagy n páratlan, és vagy minden i esetén $|A_i| = (n+1)/2$, vagy minden i esetén $|A_i| = (n-1)/2$.*

Bizonyítás. A H hatványhalmaza (szokásos jelölése $\mathcal{P}(H)$) a tartalmazás relációra nézve részben rendezett halmaz. Rajzoljuk le a 12.8. ábrához hasonlóan $\mathcal{P}(H)$ elemeit úgy, hogy az azonos elemszámú halmazok egy szintre kerüljenek (13.1. ábra). Bizonyítandó, hogy a maximális antilánc mérete legfeljebb $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Ehhez elegendő belátnunk, hogy $\mathcal{P}(H)$ felbontható $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ láncra.



13.1. ábra. $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$.

A láncokat a 0. szinttől felfelé és az n. szinttől lefelé szintenként fogjuk építeni, majd a középső szinten (szinteken) összekapcsoljuk őket. Itt $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ halmaz található, tehát a

láncfelbontás ennyi láncból fog állni. Ha megmutatjuk, hogy minden $t \leq (n-1)/2$ esetén a t-edik szint párosítható a $t+1$-edik szintbe, akkor ez a láncépítés valóban elvégezhető.

Tekintsük a t-edik szint halmazainak egy k elemű X részhalmazát. A t-edik szint egy halmaza $n-t$ darab $t+1$-edik szinten lévő halmazzal, a $t+1$-edik szint egy halmaza pedig $t+1$ darab t-edik szinten lévő halmazzal van összekötve, ezért

$$|\Gamma(X)| \geq \frac{k(n-t)}{t+1} \geq k.$$

Teljesül tehát a Hall-feltétel, így a 3.2.4. tétel alapján a t. szint valóban párosítható a $t+1$-edik szintbe. □

13.1.2. Állítás (LYM-egyenlőtlenség). *Legyen $|H| = n$, és $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$. Ha minden $i \neq j$ esetén $A_i \not\subseteq A_j$, akkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1.$$

Ebből a Sperner-tétel is következik, hiszen az $\binom{n}{|A_i|}$ kifejezés $|A_i| = \lfloor n/2 \rfloor$ esetén maximális, ezért

$$\frac{m}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1,$$

amiből szintén $m \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ adódik.

A LYM-egyenlőtlenség bizonyítása. Teljes láncnak nevezzük az $X_0, X_1, \ldots, X_n$ halmazokat, ha

$$\emptyset = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n = H.$$

Ekkor a lánc minden tagja pontosan egy elemmel bővebb az előző tagnál, tehát egy teljes láncot egyértelműen meghatároz H elemeinek egy sorba rendezése. Ebből következik, hogy összesen $n!$ különböző teljes lánc létezik, egy rögzített A_i halmazt tartalmazó teljes láncok száma pedig $|A_i|!(n-|A_i|)!$. Mivel az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ halmazok között nem fordul elő tartalmazás, egy teljes láncba közülük legfeljebb egy eshet, ezért

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|!(n-|A_i|)! \leq n!.$$

Ezt $n!$-sal osztva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. □

13.1.3. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy $m = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ csak a Sperner-tételben meghatározott esetekben lehetséges.*

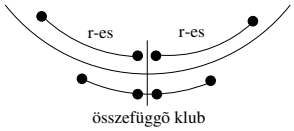
13.1.4. Definíció. *Az $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$ halmazrendszert* **r-uniformnak** *nevezzük, ha minden i esetén $|A_i| = r$.*

13.1.5. Tétel (Erdős-Ko-Rado). *Legyen $|H| = n$, és $r \leq n/2$. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$ halmazrendszer r-uniform, és minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| \geq 1$, akkor $m \leq \binom{n-1}{r-1}$.*

Bizonyítás (Katona Gyula „permutációs módszere"). Tegyük fel, hogy m darab r főből álló klub tagjai egy n fős társaságból kerülnek ki. A társaság $(n-1)!$ alkalommal rendez közös vacsorát, melyek során az emberek egy kerek asztal körül ülnek oly módon, hogy minden alkalommal különböző ciklikus sorrendben foglalnak helyet (azaz minden ülésrend pontosan egyszer fordul elő). Azt mondjuk, hogy egy vacsora alkalmával egy klub összefüggően ül, ha az r tag r egymás melletti széken foglal helyet.

13.1.6. Lemma. *Bármely vacsora alkalmával legfeljebb r klub ül összefüggően.*

Bizonyítás. Tekintsük egy rögzített összefüggően ülő klub két egymás mellett ülő tagját. A bal oldali embertől balra induló, és a jobb oldali embertől jobbra induló összefüggő r-es közül csak az egyik lehet klub, hiszen $r \leq n/2$ miatt a két r-esnek nincs közös tagja. Továbbá összefüggően ülő klub csakis az ilyen r-es párok közül kerülhet ki, hiszen minden más klub legalább egy tagjának a rögzített klub tagjai közül kell kikerülnie (13.2. ábra). Mivel összesen

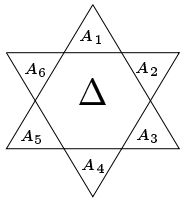


13.2. ábra. Összefüggő r-es pár, melyből legfeljebb az egyik klub.

$r-1$ pár létezik, legfeljebb $r-1$ további klub ül összefüggően. □

A tétel bizonyításának folytatása. A lemma alapján az $(n-1)!$ vacsorát együtt tekintve az összefüggő r-eseknek legfeljebb r/n-ed része lehet klub, hiszen minden r-ese ugyanannyi vacsora alkalmával ül összefüggően. Így a klubok száma legfeljebb $\frac{r}{n}\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}$. □

13.1.7. Definíció. *Az $A_1, \ldots, A_k \subseteq H$ halmazrendszert k-tagú Δ-rendszernek (vagy napraforgónak) nevezzük, ha létezik olyan $\Delta \subseteq H$, hogy minden $1 \leq i < j \leq k$ esetén $A_i \cap A_j = \Delta$ (13.3. ábra).*



13.3. ábra. Δ-rendszer (napraforgó).

Speciálisan $\Delta = \emptyset$ esetén az $A_1, \ldots, A_k$ diszjunkt halmazrendszer is Δ-rendszer.

13.1.8. Tétel (Erdős-Rado). *Legyen $r, k > 0$. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ halmazrendszer r-uniform, és nem tartalmaz k-tagú Δ-rendszert, akkor $m \leq r!(k-1)^r$.*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk r szerint. Az $r = 1$ eset triviális. Tegyük fel, hogy a tétel teljesül $r-1$ esetén. Tekintsünk az r-elemű $A_1, \ldots, A_m$ halmazok egy maximális diszjunkt rendszerét. Feltételünk miatt ez legfeljebb $k-1$ halmazból áll, tehát összesen legfeljebb $r(k-1)$ elemet tartalmaz. A fennmaradó halmazok mindegyike tartalmaz ezen

elemek közül legalább egyet. Töröljük az $r(k-1)$ elem közül az egyiket, és tekintsük azokat a halmazokat, amelyek tartalmazták ezt az elemet. Ezek a halmazok most egy olyan $(r-1)$-uniform halmazrendszert alkotnak, amely nem tartalmaz k-tagú Δ-rendszert, hiszen azok a törölt elemmel kiegészítve is Δ-rendszert alkotnának. Így az indukciós feltevés alapján a törölt elemet az $A_1, \ldots, A_m$ halmazok közül legfeljebb $(r-1)!(k-1)^{r-1}$ darab tartalmazza. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva az $r(k-1)$ elem mindegyikére azt kapjuk, hogy $m \leq r(k-1)(r-1)!(k-1)^{r-1} = r!(k-1)^r$. $\square$

A tételben szereplő becslés nem éles, a pontos felső korlát már $k = 3$-ra sem ismert. Erdős egyik kedvenc, (máig is) megoldatlan problémája volt a következő:

Probléma. Létezik-e olyan $c > 0$, hogy c^r darab r-elemű halmazból mindig kiválasztható 3-tagú Δ-rendszer?

13.2. Lineáris algebrai módszerek

13.2.1. Tétel (Erdős-De Bruijn). *Legyen $|H| = n$, és $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$. Ha minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| = 1$, akkor $m \leq n$.*

A tételben $m = n$ el is érhető például véges geometriákkal (akár elfajulókkal is) sőt akkor is, ha A_1 egyelemű halmaz, az $A_2, \ldots, A_n$ pedig az A_1 elemét is tartalmazó, különböző kételemű halmazok.

Az Erdős-De Bruijn-tétel helyett az általánosabb Bose-Fisher-tételt fogjuk bizonyítani.

13.2.2. Tétel (Bose-Fisher). *Legyen $|H| = n$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$, és $k \geq 1$. Ha minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| = k$, akkor $m \leq n$.*

Bizonyítás. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor valamely A_i (például az A_1) k elemű. Ekkor szükségszerűen minden A_j tartalmazza A_1-et, és bármely két halmaz metszete pontosan az A_1, azaz a halmazrendszer Δ-rendszer. Ebben az esetben $m \leq (n-k)+1 \leq n$.

Maradt az az eset, amikor minden i-re $|A_i| > k$. Legyen $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Az A_i halmazokhoz rendeljük hozzá a $\underline{v}_i$ n-dimenziós karakterisztikus vektorokat, ahol

$$\underline{v}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } h_j \in A_i, \\ 0 & \text{ha } h_j \notin A_i. \end{cases}$$

Elegendő belátnunk, hogy a $\{v_1, \ldots, v_m\}$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ekkor $m \leq n$. Tegyük fel, hogy:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{v}_m = \underline{0}.$$

Az egyenlőséget négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 \underline{v}_1^2 + \ldots + \lambda_m^2 \underline{v}_m^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \underline{v}_1\underline{v}_2 + \ldots + 2\lambda_{m-1}\lambda_m \underline{v}_{m-1}\underline{v}_m &= \\ = \lambda_1^2|A_1| + \ldots + \lambda_m^2|A_m| + 2\lambda_1\lambda_2 k + \ldots + 2\lambda_{m-1}\lambda_m k &= \\ = k(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)^2 + (|A_1| - k)\lambda_1^2 + \ldots + (|A_m| - k)\lambda_m^2 &= 0. \end{aligned}$$

Mivel k és $|A_1| - k, \ldots, |A_m| - k$ mind pozitív, a fenti egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0. \ \square$$

Párosfalva lakosainak kedvelt időtöltése a klubalapítás. A falu polgármestere, hogy korlátot szabjon a megalapítható klubok számának, a következő törvényeket hozza:

0.§ Bármely két klub tagsága különböző.

1.§ Minden klub létszáma páros.

2.§ Bármely két klub metszetében páros sok ember található.

A 2.§ megengedi azt is, hogy két klub diszjunkt legyen, tehát létezhet akár tag nélküli klub is. Tegyük fel, hogy Párosfalvát csak házaspárok lakják, és a párok együtt lépnek be klubokba ily módon biztosítva a törvények betartását. Így alapíthatnak $2^{n/2}$ klubot, tehát a feltételek ellenére is exponenciális maradt az alapítható klubok száma. A következő, itt nem bizonyított tétel szerint ez egyben felső korlát is az alapítható klubok számára.

13.2.3. Tétel. *Legyen $|H| = n$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$. Ha minden i esetén $|A_i|$ páros, és minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j|$ páros, akkor $m \leq 2^{n/2}$.*

A szomszédos Páratlanfalva polgármestere látván, hogy kollégájának nem sikerült célját elérnie, a következő módon határozza meg a feltételeket:

1.§ Minden klub létszáma páratlan.

2.§ Bármely két klub metszetében páros sok ember található.

Vegyük észre, hogy itt nincs szükség 0.§-ra, ez ugyanis következik a másik kettőből.

13.2.4. Tétel. *Legyen $|H| = n$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$. Ha minden i esetén $|A_i|$ páratlan, és minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j|$ páros, akkor $m \leq n$.*

Bizonyítás. Elegendő belátnunk, hogy az $A_1, \ldots, A_m$ halmazok $v_1, \ldots, v_m$ karakterisztikus vektorai lineárisan függetlenek $\mathbb{Z}^2$ felett, hiszen ebből következik, hogy $m \leq n$. Mivel $|A_i|$ páratlan, és $|A_i \cap A_j|$ páros, ezért

$$\underline{v}_i^2 \equiv 1 \pmod 2, \tag{13.1}$$

és

$$\underline{v}_i \underline{v}_j \equiv 0 \pmod 2, \text{ ha } i \neq j. \tag{13.2}$$

Tekintsük a következő lineáris kombinációt:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{v}_m \equiv 0 \pmod 2.$$

Az egyenlőséget $\underline{v}_i$-vel megszorozva (13.1) és (13.2) miatt

$$\lambda_i \equiv 0 \pmod 2$$

adódik tetszőleges i-re. □

13.2.5. Állítás. *$K_{\binom{k-1}{3}}$-nak létezik olyan színezése két színnel, amely nem tartalmaz egyszínű K_k részgráfot.*

Bizonyítás (Nagy Zsigmond konstrukciója). Feleltessük meg a gráf csúcsait egy $k-1$ elemű halmaz háromelemű részhalmazainak. Egy élt színezzünk pirosra, ha a végpontoknak megfelelő két háromelemű halmaz metszete páros sok elemet tartalmaz (nullát vagy kettőt), kékre, ha páratlan sokat (egyet). Ekkor a gráf a 13.2.4. tétel miatt nem tartalmazhat piros K_k részgráfot, a 13.2.1. tétel alapján pedig kék K_k-t sem. □

13.2.6. Definíció. *A d-dimenziós tér valamely ponthalmaza* **általános helyzetű**, *ha semelyik $d+1$ pontja nem esik egy hipersíkba.*

Definiáljuk a $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ paraméteres görbét a következőképpen:

$$P(t) = (t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d.$$

13.2.7. Definíció. *Az*

$$M^{(d)} = \{P(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ponthalmazt **momentum görbének** *nevezzük.*

13.2.8. Állítás. *A momentum görbe pontjai általános helyzetűek.*

Bizonyítás. Tekintsük a momentum görbe $d+1$ különböző pontját:

$$\begin{aligned} P(t_1) &= (t_1, t_1^2, \ldots, t_1^d) \\ P(t_2) &= (t_2, t_2^2, \ldots, t_2^d) \\ &\vdots \\ P(t_{d+1}) &= (t_{d+1}, t_{d+1}^2, \ldots, t_{d+1}^d) \end{aligned}$$

Ismert, hogy ezek a pontok akkor és csak akkor esnek egy hipersíkba, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^d \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_{d+1} & t_{d+1}^2 & \ldots & t_{d+1}^d \end{vmatrix} = 0.$$

Mivel a $t_1, t_2, \ldots, t_{d+1}$ paraméterek különbözőek, a fenti *Vandermonde*-determináns nem lehet 0. □

13.3. Polinom-módszer

Vizsgáljuk meg, hány pont adható meg az n-dimenziós térben úgy, hogy a pontpárok között legfeljebb két különböző távolság fordul elő! A megadható pontok maximális számát jelöljük $D_2(n)$-nel. A $D_2(n)$ pontos értéke nem ismert, csak alsó és felső becslése, mindkettő $O(n^2)$ nagyságrendű.

13.3.1. Állítás.

$$D_2(n) \geq \binom{n+1}{2}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő $\binom{n+1}{2}$ pontot az $(n+1)$-dimenziós térben:

$$\begin{aligned} (1,1,0,0,\ldots,0) &\in \mathbb{R}^{n+1}, \\ (1,0,1,0,\ldots,0) &\in \mathbb{R}^{n+1}, \\ &\vdots \\ (0,0,\ldots,0,1,1) &\in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

A fenti pontok mindegyike eleme az $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 2$ hipersíknak, tehát a pontok csak n-dimenziós teret határoznak meg, a pontpárok között pedig csak két különböző távolság fordul elő: 2 és $\sqrt{2}$. □

13.3.2. Állítás.

$$D_2(n) \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

Bizonyítás (polinom-módszer). A két megengedett távolságot jelölje δ_1 és δ_2. Tekintsük az $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomot:

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = \left((\underline{x} - \underline{y})^2 - \delta_1^2\right)\left((\underline{x} - \underline{y})^2 - \delta_2^2\right).$$

A $P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{R}^n$ pontok helyvektorait jelölje rendre $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$. Ekkor

$$f(\underline{a}_i, \underline{a}_j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ \delta_1^2\delta_2^2 > 0, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Definiáljuk az $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomokat a következőképpen: $f_j(\underline{x}) = f(\underline{x}, \underline{a}_j)$. Így

$$f_j(\underline{a}_i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ \delta_1^2\delta_2^2 > 0, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

13.3.3. Lemma. *Az $f_1, f_2, \ldots, f_m$ polinomok lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\lambda_1 f_1(\underline{x}) + \lambda_2 f_2(\underline{x}) + \ldots + \lambda_m f_m(\underline{x}) = 0.$$

Ekkor tetszőleges i esetén $\underline{x}$ helyére $\underline{a}_i$-t helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\lambda_i \delta_1^2 \delta_2^2 = 0,$$

amiből $\lambda_i = 0$. □

13.3.4. Lemma. *A következő polinomok generálják $f_1, f_2, \ldots, f_m$-et:*

$$\begin{array}{ll} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^2, & \\ x_i(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) & (1 \leq i \leq n), \\ x_i x_j & (1 \leq i \leq j \leq n), \\ x_i & (1 \leq i \leq n), \\ 1. & \end{array}$$

Bizonyítás. Valamely $1 \leq j \leq m$ esetén

$$f_j(\underline{x}) = \left((x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 - \delta_1^2\right)\left((x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 - \delta_2^2\right),$$

amely valóban előállítható a megadott polinomok lineáris kombinációjaként. □

A 13.3.2. állítás bizonyításának folytatása: A 13.3.4. lemmában

$$1 + n + \binom{n+1}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

polinom segítségével állítottuk elő az $f_1, f_2, \ldots, f_m$ polinomokat. Ebből következik, hogy ők legfeljebb $(n+1)(n+4)/2$ dimenziós teret generálnak, és mivel lineárisan függetlenek, a számuk is legfeljebb ennyi, tehát

$$m \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}. \quad \square$$

A következő, itt nem bizonyított lemma segítségével az előzőnél jobb felső korlát is adható $D_2(n)$-re.

13.3.5. Lemma. *Az $1, x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1, f_2, \ldots, f_m$ polinomok lineárisan függetlenek.*

13.3.6. Tétel (Blokhuijs).

$$D_2(n) \leq \binom{n+2}{2}.$$

Bizonyítás. A 13.3.4. és a 13.3.5. lemmák alapján

$$1 + n + m \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2},$$

amiből

$$m \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2}$$

következik. □

13.4. Bollobás tétele

13.4.1. Tétel (Bollobás). *Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$ olyan r-uniform, és $B_1, B_2 \ldots, B_m \subseteq H$ olyan s-uniform halmazrendszer, hogy minden i és j esetén*

$$A_i \cap B_j \begin{cases} = \emptyset, & \text{ha } i = j, \\ \neq \emptyset, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Ekkor $m \leq \binom{r+s}{r}$.

Bizonyítás (Lovász László). Minden $h \in H$ elemhez rendeljünk hozzá egy $\underline{v}_h \in \mathbb{R}^{r+1}$ pontot oly módon, hogy a $\{\underline{v}_h \mid h \in H\}$ helyvektorok az origóval kiegészítve általános helyzetűek legyenek. A 13.2.8. állítás szerint a pontokat a momentum görbéről választva ez valóban megtehető.

Ezután minden A_i halmazhoz rendeljünk hozzá olyan $\underline{a}_i \in \mathbb{R}^{r+1}$ vektort, amely minden $h \in A_i$ esetén merőleges $\underline{v}_h$ helyvektorára, azaz $\underline{a}_i \cdot \underline{v}_h = 0$. Mivel $|A_i| = r$, a $\{\underline{v}_h \mid h \in A_i\}$ pontokat tartalmazza egy r-dimenziós altér, így létezik megfelelő $\underline{a}_i$ vektor.

Vegyük észre, hogy szükségszerűen minden $h \notin A_i$-re $\underline{a}_i \cdot \underline{v}_h \neq 0$. Ha ugyanis valamely $h \notin A_i$ esetén $\underline{a}_i \cdot \underline{v}_h = 0$ lenne, akkor létezne (a $\underline{0}$ vektorral együtt) $r+2$ darab $\underline{a}_i$-re merőleges vektor, ami ellentmond az általános helyzetűségnek.

Most minden B_j halmazhoz definiáljuk a $P_j : \mathbb{R}^{r+1} \to \mathbb{R}$ polinomot a következőképpen:

$$P_j(\underline{x}) = \prod_{h \in B_j} (\underline{x} \cdot \underline{v}_h).$$

Ekkor $P_j(\underline{a}_i) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $h \in B_j$, hogy $\underline{a}_i$ merőleges $\underline{v}_h$-ra. Az észrevételünk miatt ez akkor és csak akkor igaz, ha létezik $h \in A_i \cap B_j$, azaz $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. A tétel feltételei alapján utóbbi pedig pontosan akkor teljesül, ha $i \neq j$. Így azt kaptuk, hogy

$$P_j(\underline{a}_i) \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } i = j, \\ = 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy a $P_1, \ldots, P_m$ polinomok lineárisan függetlenek.

Az $(r+1)$-változós, homogén s-edfokú $P_1, \ldots, P_m$ polinomok generálhatók

$$x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_s}$$

alakú polinomokból. Az ilyen egymástól eltérő polinomok száma a változók ismétléses kombinációja alapján

$$\left[\begin{array}{c} r+1 \\ s \end{array} \right] = \binom{r+s}{r},$$

ami egyben felső korlát $\{P_1, \ldots, P_m\}$ dimenziószámára. Mivel $P_1, \ldots, P_m$ lineárisan független, $m \leq \binom{r+s}{r}$. □

13.5. Lefogások halmazrendszerekben és gráfokban

13.5.1. Definíció. *Az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ halmazrendszert* **lefogják** *a $h_1, h_2, \ldots, h_s$ elemek, ha minden A_i-hez létezik olyan h_j, hogy $h_j \in A_i$.*

13.5.2. Definíció. *Egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer s-lefogás-kritikus, ha nem fogható le s elemmel, de minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mathcal{A} - \{A\}$ lefogható s elemmel.*

13.5.3. Tétel (Bollobás). *Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ halmazrendszer r-uniform és s-lefogás-kritikus, akkor $m \leq \binom{r+s}{r}$.*

Bizonyítás. Az, hogy az $A_1, \ldots, A_m$ halmazrendszer s-lefogás-kritikus, megfogalmazható a következő módon: nem létezik olyan s elemű B halmaz, hogy minden $1 \leq i \leq m$ esetén $A_i \cap B \neq \emptyset$, és minden $1 \leq j \leq m$-re létezik olyan s elemű B_j halmaz, hogy minden $1 \leq i \leq m$, $i \neq j$ esetén $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Ekkor $A_j \cap B_j = \emptyset$, ellenkező esetben ugyanis B_j megfelelne B halmaznak.

Ez azt jelenti, hogy az $A_1, \ldots, A_m$, és $B_1, \ldots, B_m$ halmazrendszerek megfelelnek a 13.4.1. tétel feltételeinek, így $m \leq \binom{r+s}{r}$. □

13.5.4. Tétel (Bollobás). *Ha egy r-uniform halmazrendszer bármely legfeljebb $\binom{r+s}{r}$ halmazból álló része lefogható s elemmel, akkor a teljes halmazrendszer is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ halmazrendszer bármely legfeljebb $\binom{r+s}{r}$ halmaza lefogható s elemmel, de $A_1, \ldots, A_n$ nem fogható le. Hagyjunk el halmazokat $A_1, \ldots, A_n$ közül addig, amíg s-lefogás-kritikus halmazrendszert nem kapunk. Jelölje m ezen rendszer halmazainak számát. A 13.5.3. tétel miatt $m \leq \binom{r+s}{r}$. A feltétel alapján ez az m darab halmaz viszont lefogható s elemmel, ami ellentmond annak, hogy a halmazrendszer s-lefogás-kritikus. □

A tétel nem igaz, ha $\binom{r+s}{r}$ helyére $\binom{r+s}{r} - 1$-et írunk, ellenpéldának megfelel $r + s$ elem r-elemű részhalmazainak rendszere.

Mivel a gráfok élei megfeleltethetők a csúcsok kételemű részhalmazainak, speciális esetként gráfélek lefogásáról a következő tétel adódik.

13.5.5. Tétel (Erdős-Hajnal-Moon). *Ha egy gráf bármely legfeljebb $\binom{s+2}{2}$ éle lefogható s csúccsal, akkor az egész gráf is.*

13.6. Tiltott metszetek

A 13.2.2. tétel olyan extremális halmazrendszerekkel foglalkozik, ahol bármely két halmaz metszete azonos elemszámú. Engedjünk meg most több előre rögzített értéket is a metszetek méretére, viszont legyen a halmazok elemszáma ezektől eltérő.

13.6.1. Tétel. *Legyen* $|H| = n$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$, $\mathcal{L} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, *és* $|\mathcal{L}| = s$. *Ha minden* $1 \leq i \leq m$ *esetén* $|A_i| \notin \mathcal{L}$, *és minden* $1 \leq i < j \leq m$ *esetén* $|A_i \cap A_j| \in \mathcal{L}$, *akkor*

$$m \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

A tételt az általánosabb a 13.6.4. tételre visszavezetve fogjuk bizonyítani.

Ehhez hasonló halmazrendszereket alkotnak Páratlanfalva klubjai is (13.2.4. tétel), azzal a különbséggel, hogy ott csak az elemszámok paritását kötöttük ki. Ennek általánosítása *Mod-p-falva*, amelyre a következő, Páratlanfalva tételéhez hasonlóan bizonyítható tétel adható.

13.6.2. Tétel. *Legyen* p *prímszám,* $|H| = n$, *és* $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$. *Ha minden* $1 \leq i \leq m$ *esetén* $|A_i| \not\equiv 0 \pmod{p}$, *és minden* $1 \leq i < j \leq m$ *esetén* $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod{p}$, *akkor* $m \leq n$.

Ennél is általánosabb esetet fogunk vizsgálni, ehhez szükségünk lesz a következő definícióra.

13.6.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $k \in \mathcal{L} \pmod{p}$, *ha létezik olyan* $l \in \mathcal{L}$, *hogy* $k \equiv l \pmod{p}$.

13.6.4. Tétel. *Legyen* p *prímszám,* $|H| = n$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$, $\mathcal{L} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, *és* $|\mathcal{L}| = s$. *Ha minden* $1 \leq i \leq m$ *esetén* $|A_i| \notin \mathcal{L} \pmod{p}$, *és minden* $1 \leq i < j \leq m$ *esetén* $|A_i \cap A_j| \in \mathcal{L} \pmod{p}$, *akkor*

$$m \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \ldots, l_s\}$, továbbá jelölje $\underline{a}_i$ az A_i halmaz karakterisztikus vektorát. Definiáljuk az $f_i : \{0,1\}^n \to \mathbb{Z}$ polinomot a következőképpen:

$$f_i(\underline{x}) = (\underline{a}_i\underline{x} - l_1)(\underline{a}_i\underline{x} - l_2)\ldots(\underline{a}_i\underline{x} - l_s).$$

Ekkor

$$f_i(\underline{a}_j) \begin{cases} \not\equiv 0 \pmod{p}, & \text{ha } i = j, \\ \equiv 0 \pmod{p}. & \text{ha } i \neq j, \end{cases} \tag{13.3}$$

tehát az $f_1, f_2, \ldots, f_m$ polinomok lineárisan függetlenek $\mathbb{Z}_p$ felett. Képezzük f_i-ből az $\hat{f}_i$ polinomot oly módon, hogy $\hat{f}_i(\underline{x})$-ben az összes változó minden nemlineáris előfordulását változtassuk lineárisra, azaz x_t^α $(\alpha > 1)$ helyére írjunk x_t-t. (Ezt az eljárást *multilinearizációnak* nevezzük.) Mivel x_t értéke csak 0 vagy 1 lehet, ezért $f_i(\underline{x}) = \hat{f}_i(\underline{x})$. Ebből és (13.3)-ból következik, hogy az $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m$ polinomok szintén lineárisan függetlenek $\mathbb{Z}_p$ felett.

Az n-változós, legfeljebb s-edfokú multilineáris polinomok $\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ dimenziós teret alkotnak, tehát

$$m \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}. \quad \square$$

A 13.6.2. tétel valóban következik ebből, ha p-nek egy n-nél nagyobb prímet választunk.

Ha a halmazrendszerről megköveteljük, hogy *mod-p-uniform* is legyen (azaz minden $1 \leq i \leq m$ esetén $|A_i| \equiv k \pmod{p}$), akkor a következő, itt nem bizonyított felső becslés is igaz.

13.6.5. Tétel. *Legyen p prímszám, $|H| = n$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq H$, $\mathcal{L} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|\mathcal{L}| = s$ és $k \notin \mathcal{L}$. Ha minden $1 \leq i \leq m$ esetén $|A_i| = k \pmod p$, és minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| \in \mathcal{L} \pmod p$, akkor $m \leq \binom{n}{s}$.*

Most rögzítsünk egy t számot, és az $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazrendszer legyen olyan, hogy minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| \neq t$. Mely t értékek esetén adható $(2-\mathcal{E})^n$-nél kisebb nagyságrendű felső korlát m-re?

Ha például n páros, és $t = n/2$, akkor a legfeljebb $n/2$ elemű halmazok rendszere megfelel a feltételnek. Ezen halmazok száma azonban

$$m = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n/2} = \frac{2^n}{2},$$

tehát itt m nagyságrendje nem kisebb 2^n-nél.

Megoldatlan azonban a fenti kérdés a következő esetben.

13.6.6. Sejtés (Erdős). *Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $0 < \lambda < 1/2$, és $t = \lambda n$ egész. Ha minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| \neq t$, akkor létezik olyan $\mathcal{E}(\lambda) > 0$, és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ esetén $m \leq (2 - \mathcal{E}(\lambda))^n$.*

A következő tétel a fenti sejtést igazolja egy speciális esetben.

13.6.7. Tétel. *Legyen p prímszám, $n = 4p - 1$, és $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Ha minden $1 \leq i \leq m$ esetén $|A_i| = 2p - 1$, és minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| \neq p - 1$, akkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0$-ra $m \leq 1.8^n$.*

13.6.8. Lemma. *Legyen $0 < \lambda < 1$, $\lambda n \in \mathbb{N}$, és $q_1, q_2 > 0$. Ha*

$$q_1 < \frac{1}{\lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda}} < q_2,$$

akkor létezik olyan $n_0(q_1, q_2, \lambda) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ esetén

$$q_1^n < \binom{n}{\lambda n} < q_2^n.$$

Bizonyítás. Határozzuk meg $\binom{n}{\lambda n}$ nagyságrendjét a Stirling-formula segítségével!

$$\begin{aligned}\binom{n}{\lambda n} &= \frac{n!}{(\lambda n)!\big((1-\lambda)n\big)!} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{\lambda n}{e}\right)^{\lambda n}\left(\frac{(1-\lambda)n}{e}\right)^{(1-\lambda)n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi\lambda n}\sqrt{2\pi(1-\lambda)n}} \sim \\ &\sim \left(\frac{1}{\lambda^\lambda(1-\lambda)^{1-\lambda}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

A lemma feltétele miatt a kapott nagyságrend valóban q_1^n és q_2^n közé esik. □

A 13.6.7. tétel bizonyítása. Legyen $\mathcal{L} = \{0, 1, \ldots, p-2\}$. A feltételek alapján minden $1 \leq i \leq m$ esetén $|A_i| \equiv -1 \notin \mathcal{L} \pmod p$, és minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| \in \mathcal{L} \pmod p$, így a 13.6.4. tétel szerint

$$\begin{aligned}m &\leq \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p-2} + \ldots + \binom{n}{0} = \binom{4p-1}{p-1} + \binom{4p-1}{p-2} + \ldots + \binom{4p-1}{0} < \\ &< p\binom{4p-1}{p-1} < p\binom{4p}{p}.\end{aligned}$$

Legyen

$$q_2 = 1.8 > \frac{1}{(\frac{1}{4})^{1/4}(\frac{3}{4})^{3/4}}.$$

Ekkor a 13.6.8. lemma alapján létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ esetén

$$p\binom{4p}{p} < 1.8^{4p-1} = 1.8^n. \quad \square$$

13.7. Színezések és egységtávolságok

Az extremális halmazrendszerek is szerepet kapnak a következő geometriai probléma vizsgálatakor: az n-dimenziós tér pontjait legalább hány színnel kell színezni ahhoz, hogy az egymástól egységnyi távolságra lévő pontok mindenképp különböző színűek legyenek. Az ilyen színezéseket nevezzük *helyes színezéseknek.*

Könnyű belátni, hogy a síkot 3 színnel színezve keletkezik egyszínű, egységtávolságú pontpár. Most megadjuk a síknak egy helyes színezését 9 színnel. Legyen egy $1/2 < a < 1/\sqrt{2}$ oldalú négyzetekből álló 3×3-as négyzetrács minden négyzete különböző színű. A síkot ilyen négyzetrácsokból kirakva megfelelő színezést kapunk. A sík helyes színezése megoldható 8, sőt 7 színnel is, viszont nem ismert, mi a helyzet 4, 5 illetve 6 szín esetén.

A síkbeli négyzetrácsok színezéséhez hasonlóan az n-dimenziós tér is színezhető egy n-dimenziós kockarácsnak megfelelően. A kockarács most legyen $(\sqrt{n}+2) \times (\sqrt{n}+2) \times \ldots \times (\sqrt{n}+2)$-es, és álljon $1/(\sqrt{n}+1) < a < 1/\sqrt{n}$ oldalú kockákból. Így $\mathbb{R}^n$ helyes színezését kapjuk $(\sqrt{n}+2)^n$ színnel.

Jelölje k_n az $\mathbb{R}^n$ helyes színezéséhez szükséges színek minimális számát. A fenti színezés alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik k_n, és $k_n \leq (\sqrt{n}+2)^n$. Szabályos n-dimenziós szimplexek segítségével belátható, hogy $k_n > n+1$. E két becslés nagyságrendje igen távol esik egymástól, a következő tétel alapján azonban $n = 4p-1$ dimenziószám esetén (ahol p prím) exponenciális alsó becslés is adható.

13.7.1. Tétel. *Legyen p prímszám. Létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n = 4p-1 > n_0$ esetén $k_n > 1.1^n$.*

Bizonyítás. Természetesen az eredetivel ekvivalens problémát kapunk, ha a helyes színezésekben az egységtávolság helyett tetszőleges rögzített távolságot tiltunk meg. A bizonyítást egyszerűbbé teszi, ha ez a távolság $\sqrt{2p}$.

Tekintsük $\mathbb{R}^n$ azon pontjait, melyek helyvektorában $2p-1$ darab 1-es, és $2p$ darab 0 szerepel. Megmutatjuk, hogy már ezeknek a pontoknak a színezéséhez is több, mint 1.1^n szín szükséges.

Két ilyen pont közötti távolság akkor és csak akkor $\sqrt{2p}$, ha pontosan $p-1$ helyen szerepel mindkét pont helyvektorában 1-es. A pontok helyvektorait karakterisztikus vektoroknak tekintve ez azt jelenti, hogy a nekik megfelelő halmazok metszete $p-1$ elemű. Így a 13.6.7. tétel szerint bármely 1.8^n pont között előfordul a $\sqrt{2p}$ távolság, tehát azonos színnel a megadott pontok közül csak ennél kevesebbet színezhetünk.

A pontok száma $\binom{4p-1}{2p-1}$, mely a Stirling-formula alapján nagyságrendileg $2^n/\sqrt{n}$, így

$$k_n > \frac{2^n/\sqrt{n}}{1.8^n},$$

ami elég nagy n esetén nagyobb 1.1^n-nél. $\square$

13.7.2. Következmény. *Létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$-ra $k_n > 1.1^{n/2}$.*

Bizonyítás. Használjuk Csebisev tételét, mely szerint tetszőleges $(k, 2k]$ intervallum tartalmaz prímszámot. □

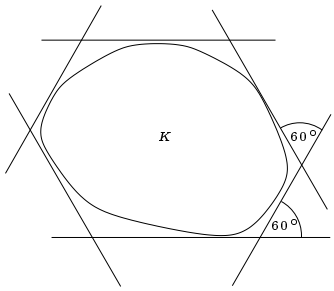
13.8. Borsuk-probléma

A másik problémakör, melyben szintén felhasználjuk a tiltott metszetekre vonatkozó 13.6.7. tételt, azt vizsgálja, hány kisebb átmérőjű zárt résszel lehet lefedni egy korlátos és zárt $\mathbb{R}^n$-beli halmazt.

13.8.1. Definíció. *Egy halmaz* **átmérőjén** *a benne előforduló távolságok szuprérumát értjük. (Korlátos és zárt halmaz esetén maximumot is mondhatunk.)*

13.8.2. Lemma (Pál). *Minden D átmérőjű síkbeli korlátos és zárt K halmaz befoglalható D szélességű szabályos hatszögbe.*

Bizonyítás. Fektessünk adott i irányú párhuzamos támaszegyeneseket K mindkét oldalára, majd ismételjük meg ezt az i irány 60° és 120°-os elforgatása esetén is (13.4. ábra).



13.4. ábra. Támaszegyenesek által meghatározott hatszög.

Ha a támaszegyenesek közé eső rész középpontosan szimmetrikus hatszög, akkor ez befoglalható egy vele megegyező állású, D szélességű szabályos hatszögbe. Megmutatjuk, hogy létezik olyan i irány, hogy a támaszegyeneseket ennek az iránynak megfelelően berajzolva a közéjük eső hatszög középpontosan szimmetrikus lesz.

A támaszegyenesek által meghatározott (belső) sokszög oldalhosszait jelölje a, b, c, d, e, f (esetleg lehet közöttük 0 is). A 13.5. ábra szerint

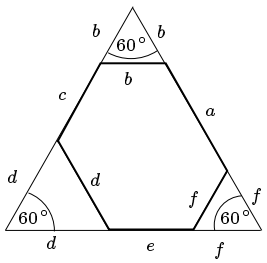
$$a + b + f = c + b + d = e + d + f,$$

melyből

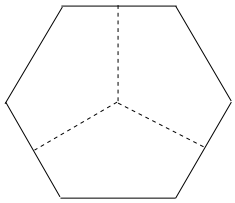
$$a - d = c - f = e - b.$$

A sokszög tehát akkor és csak akkor középpontosan szimmetrikus, ha $a - d = 0$. Az i irányt 0°-tól 180°-ig forgatva $a - d$ értéke az ellentettjére változik, s mivel ez a változás folytonos, 0° és 180° között felveszi a 0 értéket is. □

13.8.3. Tétel (Pál). *Minden D átmérőjű síkbeli korlátos és zárt K halmaz lefedhető három D-nél kisebb átmérőjű zárt halmazzal.*



13.5. ábra. $a - d = c - f = e - b$.



13.6. ábra. A Pál-hatszög felbontása.

Bizonyítás. Fedjük le K-t a lemmában szereplő hatszöggel, majd bontsuk három (D-nél kisebb átmérőjű) részre a hatszöget a 13.6. ábrának megfelelően. □

Egy háromdimenziós gömb már nem fedhető le 3 kisebb átmérőjű halmazzal, könnyű viszont mutatni 4 halmazból álló fedést. Hasonlóan d-dimenziós gömb is lefedhető $d+1$ kisebb átmérőjű halmazzal. Itt nem bizonyítjuk, hogy a $d+1$ halmaz szükséges is.

13.8.4. Tétel (Borsuk). *Egy d-dimenziós D átmérőjű gömb lefedéséhez legalább $d+1$ darab D-nél kisebb átmérőjű zárt halmaz szükséges, és $d+1$ halmaz elegendő is.*

Ezt a tételt felhasználva bebizonyítjuk, hogy tetszőleges „sima felületű" konvex halmaz esetén is elegendő $d+1$ rész.

13.8.5. Állítás. *Ha az $\mathbb{R}^d$-beli D átmérőjű konvex korlátos és zárt K halmaz minden határpontjára pontosan egy támaszhipersík illeszkedik, akkor K lefedhető $d+1$ darab D-nél kisebb átmérőjű zárt halmazzal.*

Bizonyítás. A K tetszőleges P határpontjához rendeljük hozzá a D átmérőjű d-dimenziós gömb felületének azt a P' pontját, melyre a P-re és P'-re illeszkedő támaszhipersíkok párhuzamosak, továbbá K és a gömb a hipersíkoknak ugyanazon oldalára esik.

Tekintsük a gömb $A_1, A_2, \ldots, A_{d+1}$ D-nél kisebb átmérőjű zárt halmazokból álló fedését. Tegyük P-t a B_i halmazba, ha $P' \in A_i$.

Ha K felületének P és Q pontjai D távolságra vannak egymástól, akkor a rájuk illeszkedő támaszhipersíkok párhuzamosak. Ebből következik, hogy a P'-re és Q'-re illeszkedő támaszhipersíkok is párhuzamosak, tehát P' és Q' a gömb átellenes pontjai, azaz távolságuk D. Ez azt jelenti, hogy P' és Q' a gömb fedésében különböző halmazokba esnek, így P és Q is különböző B_i halmazokba tartoznak.

Legyen O egy rögzített belső pontja K-nak. Az OP szakasz összes belső pontját tegyük a P-t tartalmazó B_i halmazba, O-t pedig helyezzük el egy tetszőleges halmazban. Így a $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_{d+1}$ halmazok megfelelő lefedését adják K-nak. □

Az állítás alapján Borsuk sejtése az volt, hogy ugyanez igaz minden korlátos és zárt halmaz esetén, de a következő tétel szerint (meglepő módon) a fedéshez szükséges halmazok száma $\sqrt{d}$-ben exponenciális.

13.8.6. Tétel (Kahn-Kalai). *Ha p prímszám, és $d = \binom{4p-1}{2}$, akkor létezik olyan $\mathbb{R}^d$-beli D átmérőjű korlátos és zárt halmaz, melynek D-nél kisebb átmérőjű zárt halmazokkal való fedéséhez legalább $1.1^{\sqrt{d}}$ halmaz szükséges.*

Bizonyítás. Legyen B egy $4p-1$ elemű halmaz. Minden $B_i \subset B$, $|B_i| = 2p-1$ részhalmazhoz rendeljük hozzá a B csúcshalmazú teljes gráf éleinek azon E_i részhalmazát, mely a B_i és $B - B_i$ közötti éleket tartalmazza. Legyen $d = \binom{4p-1}{2}$, és jelölje $\underline{e}_i$ az E_i karakterisztikus vektorát, illetve az annak megfelelő R^d-beli pontot. A K_0 halmaz legyen az $\underline{e}_i$ pontok halmaza. Megmutatjuk, hogy már K_0 fedéséhez is „sok" részre van szükség, így az ő (korlátos, zárt) K konvex burkához is.

Az $\underline{e}_i$ és $\underline{e}_j$ pontok akkor és csak akkor vannak K_0-ban maximális távolságra egymástól, ha $|E_i \cap E_j|$ minimális. Megmutatjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $|B_i \cap B_j| = p-1$.

Valóban, ha $|B_i \cap B_j| = x - 1$, akkor

$$|E_i \cap E_j| = x(x-1) + (2p-x)^2 = 2x^2 + (4p+1)x + 4p^2,$$

melynek valós minimuma $x = p + 1/4$-ben, egész minimuma pedig $x = p$-ben van.

A 13.6.7. tétel alapján bármely 1.8^{4p-1} darab különböző B_i halmaz között létezik kettő, melyek metszete $p-1$ elemű, azaz a megfelelő $\mathbb{R}^d$-beli pontok távolsága maximális. Ez azt jelenti, hogy K_0 fedésének egyik halmaza sem tartalmazhat 1.8^{4p-1} pontot, tehát a szükséges halmazok száma több, mint

$$\frac{\binom{4p-1}{2p-1}}{1.8^{4p-1}} \sim \frac{2^{\sqrt{d}}/\sqrt[4]{d}}{1.8^{\sqrt{d}}},$$

ami elég nagy d esetén nagyobb $1.1^{\sqrt{d}}$-nél. □

13.8.7. Következmény. *Létezik olyan $d_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $d > d_0$-ra (alkalmas K halmazhoz) legalább $1.1^{\sqrt{d}/2}$ fedő halmaz szükséges.*

Bizonyítás. A 13.7.2. következményhez hasonlóan itt is használhatjuk a Csebisev-tételt. □

A. Függelék

Leszámlálás

A.1. A szita-módszer

Tekintsünk egy véges A alaphalmazt és annak $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részhalmazait. Az alkalmazásokban általában A_i-be azok az elemek tartoznak, amelyek egy bizonyos i-edik szempontból rosszak. Feladatunk annak meghatározása, hogy hány olyan A-beli elem van, amelyik az $1, 2, \ldots, k$ szempontok mindegyike szerint jó, tehát hány eleme van az

$$A - \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

halmaznak? A $k = 1, 2, 3$ esetekben a következő módon adhatunk választ:

$k = 1$ $\quad |A| - |A_1|$

$k = 2$ $\quad |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$

$k = 3$ $\quad |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Ezt a módszert szita-módszernek nevezzük. Megmutatjuk, hogy a szita-formula általánosítható tetszőlges k esetére.

A.1.1. Állítás.

$$|A - \bigcup_{i=1}^{k} A_i| = |A| - \sum_{1 \le i \le k} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^k |A_1 \cap \ldots \cap A_k|$$

Bizonyítás. A jó elemek nyilván pontosan egyszer szerepelnek a kifejezésben, ezért elég azt belátnunk, hogy minden rossz elemet 0-szor számoltunk. Tegyük fel, hogy a rossz x elem s darab A_i-ben van benne. Az $|A|$ tagban szerepel egyszer, az $r = 1$-hez tartozó tagokban $(-s)$-szer, $r = 2$ esetén $\binom{s}{2}$-ször, valamely $r \le s$ esetén pedig $(-1)^r \binom{s}{r}$-szer, így összesen

$$\sum_{r=0}^{s} (-1)^r \binom{s}{r} = (1-1)^s = 0$$

alkalommal számoltuk x-et. □

A szita-módszer alkalmazására tekintsük a következő példát. Egy színházi előadásra k ember érkezik, mindannyian különböző kabátban. A kabátokat berakják a ruhatárba, az előadás után pedig a ruhatáros szétosztja azokat, figyelmen kívül hagyva, hogy melyik kabát kinek a tulajdona. Hányféleképpen oszthatók ki úgy, hogy senki se kapja a sajátját?

Az A alaphalmaz legyen a lehetséges szétosztások halmaza, az A_i-be pedig azon szétosztások tartozzanak, ahol az i-edik ember a saját kabátját kapja. Ekkor a teljesen rossz szétosztások száma a szita-formula alapján

$$|A - \bigcup_{i=1}^{k} A_i| =$$

$$= k! - k(k-1)! + \tbinom{k}{2}(k-2)! - \tbinom{k}{3}(k-3)! + \ldots + (-1)^k(k-k)! =$$

$$= k! - k! + \tfrac{k!}{2!} - \tfrac{k!}{3!} + \ldots + (-1)^k \tfrac{k!}{k!} =$$

$$= k!\big[1 - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \tfrac{1}{k!}\big].$$

Mivel

$$\lim_{k\to\infty}\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right] = \frac{1}{e},$$

azt mondhatjuk, hogy a szétosztások $1/e$-ed részében senki sem a saját kabátját kapja, ha az előadás látogatottsága a végtelenbe tart.

A.2. Golyók és dobozok

Hányféleképpen lehet n golyót k dobozba elhelyezni a következő szempontokat figyelembe véve:

- a golyók lehetnek egyformák vagy számozottak,
- a dobozok lehetnek egyformák vagy számozottak,
- az egy dobozba kerülő golyók száma lehet legfeljebb 1, legalább 1, illetve tetszőleges.

Az A.2. táblázat foglalja össze a lehetséges eseteket.

	számozott golyók		egyforma golyók	
minden dobozba	számozott dobozok	egyforma dobozok	számozott dobozok	egyforma dobozok
max. 1	$k(k-1)\ldots(k-n+1)$	1	$\binom{k}{n}$	1
min. 1	$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}(k-r)^n$ (1)	$\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}(k-r)^n$ (2)	$\binom{n-1}{k-1}$	(5)
tetsz.	k^n	$\sum_{i=1}^{k} S_{n,i}$ (3)	$\binom{n+k-1}{k-1}$ (4)	

A.1. táblázat. Golyók elhelyezése dobozokba.

A megjelölt mezőkhöz tartozó magyarázatok:

(1) Szita-formula, A_i legyen azon elosztások halmaza, ahol az i-edik doboz üres.

(2) Erre az esetre az (1)-ben szereplő formulában minden elosztást $k!$-szor számoltunk, ezért kell osztani $k!$-sal. A kapott formulát Stirling-számnak nevezzük, és $S_{n,k}$-val jelöljük.

(3) A felhasznált dobozok száma $1, 2, \ldots, k$ lehet.

(4) Ismétléses kombináció.

(5) Szám-partíciók (általános, egyszerű képlet nem ismert, elemi összefüggéseket lásd gyakorlaton).

A.3. A generátor-függvény fogalma és tulajdonságai

A.3.1. Definíció. *Legyen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ valós számsorozat. Az*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvényt az a_n sorozat **generátor-függvényének**, *a*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

függvényt pedig az a_n sorozat **exponenciális generátor-függvényének** *nevezzük.*

Az elnevezést az indokolja, hogy a sorozat tagjai egyértelműen visszanyerhetők, amennyiben a fenti végtelen sorok nemcsak $x = 0$-ra konvergensek. Analízisből ismert továbbá, hogy ebben az esetben a generátor-függvények konvergencia-tartománya egy (esetleg végtelen) intervallum, illetve a sorok tagonként differenciálhatók és integrálhatók.

A legismertebb generátor-függvények a végtelen mértani sorozat összege és az e^x függvény:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1), \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

A generátor-függvények felhasználhatók rekurzióval definiált sorozatok általános tagjának meghatározására. Rekurzív definícióból ugyanis sokszor könnyen megadható a sorozat generátor-függvénye, melyből a sorozat tagjai valamilyen (feladattól függő) módszerrel számíthatók.

Feladat: Tekintsük az alábbi rekurzióval adott sorozatot:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Adjunk explicit képletet a_n-re!

Az a_n sorozat generátor-függvénye a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} - 4a_{n-2}) x^n = \\ &= 1 + 4x + 4x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 4x + 4x\big(a(x) - 1\big) - 4x^2 a(x) = \\ &= 1 + 4x a(x) - 4x^2 a(x), \end{aligned}$$

melyből

$$a(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Felhaszálva, hogy

$$\Big(\frac{1}{1-2x}\Big)' = \frac{2}{(1-2x)^2},$$

és

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n,$$

tagonkénti deriválást alkalmazva

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-2x}\Big)' = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (2^n x^n)' = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot 2^n x^n, \end{aligned}$$

amiből $a_n = (n+1) \cdot 2^n$.

Lássunk egy példát exponenciális generátor-függvények alkalmazására is.

Feladat: Adjunk explicit képletet a következő sorozat n-edik tagjára:

$$s_0 = 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s_{n-k} \quad (n \geq 1)!$$

Az s_n sorozat az alábbi exponenciális generátor-függvényt definiálja:

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{s_{n-k}}{(n-k)!} \Big) x^n = \\ &= 1 + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big) \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{s_m}{m!} x^m \Big) = 1 + (e^x - 1) s(x). \end{aligned}$$

Ebből

$$s(x) = \frac{1}{2 - e^x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^x/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{2^k \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} \Big),$$

tehát

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

A.4. Catalan-számok

A.4.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Ismert, hogy az $(1+x)^\alpha$ függvény ($\alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1$) a következőképpen fejthető sorba (általános binomiális-tétel):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

A későbbiekben szükségünk lesz az $\alpha = 1/2$ esetre, ezért írjuk fel az $\binom{1/2}{n}$ kifejezés értékét.

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1/2 \cdot (-1/2) \cdot (-3/2) \cdot \ldots \cdot (-(2n-3)/2)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-2)!}{2^n \cdot n! \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Feladat: Hány olyan olyan $2n$ hosszú, 1 és -1 számokból álló sorozat van, melynek összege 0, és minden részletösszege nem-negatív?

Jelöljük c_n-nel az ilyen sorozatok számát. Nyilván $c_0 = 1$ és $c_1 = 1$. A $2n$ hosszú sorozatokat osztályozzuk aszerint, hogy melyik az utolsó 0 részletösszegük a teljes összeg előtt (természetesen csak páros sok tagból álló részletösszeg lehet 0). A sorozat tagjait jelölje $a_1, a_2, \dots a_{2n}$. Ha egy sorozat utolsó 0 részletösszege $2k$ tagból áll, akkor szükségszerűen $a_{2k+1} = 1$ (és persze minden esetben $a_{2n} = -1$). Ekkor az $a_{2k+2}, a_{2k+3}, \dots, a_{2n-1}$ részsorozat összege 0 és minden részletösszege nem-negatív. Az ilyen sorozatok száma c_{n-k-1}, tehát $n \geq 1$-re

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

Jelölje $c(x)$ a c_n sorozat generátor-függvényét:

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Ekkor a rekurzív összefüggést felhasználva

$$\big(c(x)\big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \Big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c^n x^{n-1} = \frac{c(x)-1}{x},$$

amiből

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

A másodfokú egyenlet másik megoldása, az $(1+\sqrt{1-4x})/2x$ azért nem jöhet szóba, mert annak abszolút értéke $x = 0$-ban végtelenhez tart. A $\sqrt{1-4x}$ függvény a következőképpen fejthető sorba:

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (-4)^n x^n,$$

így

$$c(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \frac{(-4)^n \cdot x^n}{2x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (-1)^{m+1} \cdot 4^{m+1}}{(m+1) \cdot 2^{2m+2}} \binom{2m}{m} x^m =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} x^m,$$

tehát

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

A c_n számokat *Catalan-számoknak* nevezzük.

A.5. Szám-partíciók

Jelölje $P_k(n)$ az n természetes szám felbontásainak számát k-nál nem nagyobb pozitív egészek összegére. (Ugyanazt az összeadandót többször is használhatjuk; a sorrend nem számít.)

A.5.1. Állítás.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_k(n) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő függvényt:

$$p_k(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)\dots(1 + x^k + x^{2k} + \dots).$$

A $p_k(x)$ egyrészt megegyezik az állítás jobb oldalán álló kifejezéssel, másrészt a p_k függvény sorbafejtésében x^n együtthatója pontosan $P_k(n)$, amelyből már következik az állítás. □

Jelölje $P_k^{i_1,i_2,\dots,i_k}(n)$ az n természetes szám felbontásainak számát k-nál nem nagyobb pozitív egészek összegére, ahol a felbontásban j legfeljebb i_j-szer fordul elő $(1 \le j \le k)$.

A.5.2. Állítás.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_k^{i_1,i_2,\dots,i_k}(n) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{i_1}) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2i_2}) \cdot$$
$$\cdot (1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3i_3}) \cdot \dots \cdot (1 + x^k + x^{2k} + \dots + x^{i_k k}).$$

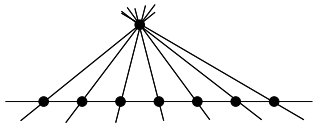
Bizonyítás. Triviális.

A.6. Permutációk egy alkalmazása: a Scott-probléma

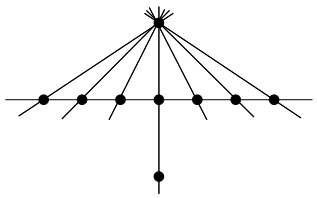
Tekintsünk a síkon n pontot, melyek nem mind kollineárisak. Legalább hány különböző irányú egyenest határoznak meg ezek a pontok?

Ha az n pont közül $n-1$ kollineáris, akkor n irányt kapunk (A.1. ábra).

Ha n páratlan, akkor a pontok elhelyezhetők a síkon oly módon is, hogy csak $n-1$ irány keletkezik. Egy ilyet szemléltet az A.2. ábra, ahol $2k-1$ pont egyenlő közökkel helyezkedik el egy egyenesen, a fennmaradó két pont pedig azonos távolságra van az egyenestől.



A.1. ábra. n pont n irányt határoz meg.



A.2. ábra. $2k+1$ pont $2k$ irányt határoz meg.

Az A.3. ábrán $2k+1$ pont szintén $2k$ irányt, az A.4. ábrán pedig $4k+1$ pont $4k$ irány határoz meg.

Látható tehát, hogy páratlan pontszám esetén sok olyan példa van, ahol az irányok száma 1-gyel kevesebb a pontok számánál. Ennek ellenére igaznak bizonyult Scott sejtése, miszerint a fenti elhelyezkedések a problémára nézve extremálisak.

A.6.1. Tétel (Ungár). *Tekintsünk a síkon n pontot, melyek nem mind kollineárisak. Ha $n = 2k+1$, vagy $n = 2k$, akkor az n pont legalább $2k$ különböző irányú egyenest határoz meg.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő a tételt $n = 2k$ esetén bizonyítani. Vetítsük a pontokat minden lehetséges irányban egy egyenesre! A pontok vetületeinek sorrendje az egyenesen (feltéve, hogy minden pont képe különböző) a pontok egy permutációját határozza meg. Az egyenest forgatva ezen permutáció változásaihoz pontosan azok a vetítési irányok tartoznak, melyeket az n pont határoz meg. A permutáció egy ilyen változását a továbbiakban lépésnek nevezzük. Egy 180°-os fordulathoz tartozó lépések száma tehát megegyezik a pontok által meghatározott különböző irányok számával. A 180°-os fordulat definiálja a pontok permutációinak egy sorozatát, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) Az utolsó permutáció az elsőnek a megfordítottja.

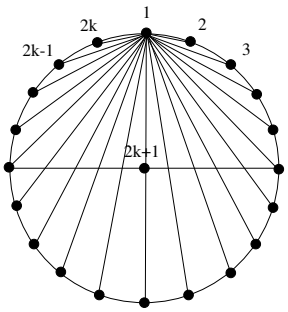
(2) Egy lépésben szomszédos pontokból álló diszjunkt blokkok sorrendje fordul meg (A.5.ábra). (Egy ilyen blokkban kollineáris pontok találhatók. Két vagy több blokk ugyanabban a lépésben fordul meg, ha a hozzájuk tartozó egyenesek párhuzamosak.)

(3) Nem fordíthatjuk meg egyszerre az összes elemet (hiszen nem minden pont kollineáris).

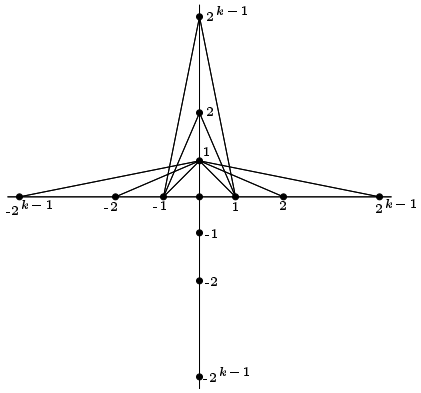
(4) Bármely két pont egymáshoz viszonyított helyzete a permutációban pontosan egyszer változik.

Nevezzük középpontnak az egyenes egy olyan pontját, melynek mindkét oldalán k darab pont fekszik. Átmenetnek pedig nevezzük azt, ha egy pont egy lépés által átkerül a permutáció első feléből a második felébe (azaz balról jobbra átugorja a középpontot).

A.6.2. Lemma. *Ha valamely lépés által s darab, majd egy későbbi által t darab átmenet történik, akkor a két lépés között van legalább további $s+t-1$ lépés, ami egyetlen átmenetet sem tartalmaz.*



A.3. ábra. $2k+1$ pont $2k$ irányt határoz meg.



A.4. ábra. $4k+1$ pont $4k$ irányt határoz meg.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az s átmenetet tartalmazó lépés előtt a pontok számozása $1, 2, 3, \ldots, 2k$. Ez azt jelenti, hogy egy innen kezdődő 180°-os forgatás lépéseiben csak olyan blokkok fordíthatók meg, melyekben a pontok sorszáma növekvő (növő blokk). Ebből következik, hogy egy lépés során

(a) a középponton átnyúló bármely csökkenő blokk mindkét végén legfeljebb 1-gyel rövidül,

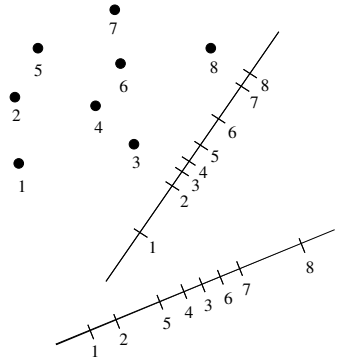
(b) a középponton átnyúló bármely növő blokk mindkét végén legfeljebb 1-gyel hosszabbodik.

Az s átmenetet okozó lépés által egy, a középpontot is magába foglaló olyan csökkenő blokk keletkezik, mely a középponttól mindkét oldalon legalább s pontot tartalmaz. Ennek a csökkenő résznek az eltűnéséhez (a) miatt legalább s lépés szükséges, melyek alatt nem történhet további átmenet.

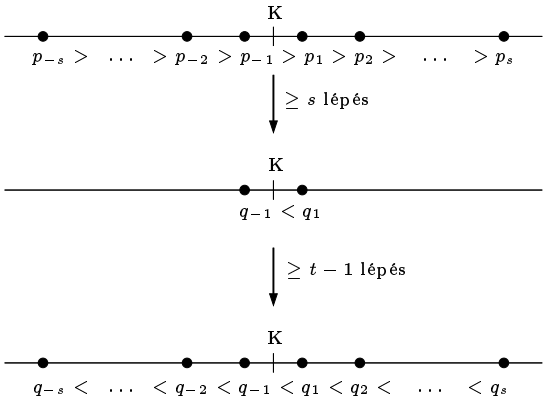
Egy t átmenettel járó lépésre akkor kerülhet sor, ha felépül egy mindkét oldalon legalább t pontból álló növő blokk, amihez (b) miatt legalább további $t-1$ lépés szükséges. Így $s+t-1$ lépés alatt biztosan nem történik egyetlen átmenet sem (A.6. ábra). □

A tétel bizonyításának folytatása. Egy 180°-os forgatás alatt az átmenetet okozó lépések során az átmenetek számát jelölje időrendi sorrendben $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Az (1) és (4) tulajdonságok miatt összesen k átmenet történik, tehát

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r = k.$$



A.5. ábra. A 3,4,5 blokk megfordítása egy lépésben.



A.6. ábra. Az s és t darab átmenet között szükséges lépések.

A lemma alapján ezen lépések között legalább

$$(u_1 + u_2 - 1) + (u_2 + u_3 - 1) + \ldots + (u_{r-1} + u_r - 1) + (u_r + u_1 - 1)$$

darab olyan lépés is történik, amikor nincs átmenet. Így a lépések száma összesen legalább

$$2(u_1 + u_2 + \ldots + u_r) - r + r = 2(u_1 + u_2 + \ldots + u_r) = 2k. \ \square$$

A fenti bizonyítás lényegében tartalmazza a következő, geometriai tartalom nélküli, csupán permutációkra megfogalmazott tételt is.

A.6.3. Tétel (Ungár). *Ha $2k$ elem permutációinak sorozata rendelkezik az A.6.1. tétel bizonyításában szereplő (1)-(4) tulajdonságokkal, akkor ez a sorozat legalább $2k$ permutációból áll.*

Tárgymutató

Δ-rendszer, 71
k-cseresznye, 51
k-szorosan összefüggő, 13
k-szorosan él-összefüggő, 13
r-reguláris gráf, 14
összefüggő, 8
ütemezési feladat, 68
éllista, 6

alternáló út, 15
antilánc, 66

Blokhuijs, 76
Bollobás, 76
Borsuk-probléma, 81
Borsuk-tétel, 82
Bose-Fischer, 72
Brooks, 44

Catalan-számok, 88
csúcsmátrix, 6
cseresznye, 50

Dijkstra-algoritmus, 35
Dilworth, 66
duális Dilworth-tétel, 68
duális gráf, 32

Edmonds-Karp, 65
egész folyam lemmája, 64
Erdős, 19
Erdős-De Bruijn, 46, 72
Erdős-Gallai, 51
Erdős-Hajnal-Moon, 77
Erdős-Ko-Rado, 70
Erdős-Rado, 71
Erdős-Sós, 51
Erdős-Stone-Simonovits, 49
Erdős-Szekeres, 25, 28
Euler, 1
Euler-összefüggés, 30

exponenciális generátor-függvény, 86
extremális gráf, 47
extremális halmazrendszer, 69

független élrendszer, 14
Fano, 53
feszítő fa, 40
folyam érték, 63
Ford-Fulkerson, 63
Frank, 61

Gallai, 55
generátor-függvény, 86
gráf, 1

hálózati folyam, 63
házasság probléma, 14
Hall, 57
Hall-feltétel, 15
Hamilton-kör, 39
heap, 36

jó karakterizáció, 43
javító út, 58, 64

königsbergi hidak, 1
kétszeresen összefüggő, 13
kétszeresen él-összefüggő, 13
Kőnig Dénes, 14
Kőnig Gyula, 3
Kőnig-Hall-tétel, 16
Kőnig-tétel, 57
Kahn-Kalai, 83
karakterisztikus vektor, 72
Katona Gyula, 71
Kollár-Rónyai-Szabó, 51
komponens, 8
kromatikus szám, 43
Kruskal-algoritmus, 40
kupac, 36

lánc, 66

lefogás-kritikus, 77
lefogó ponthalmaz, 57
Lenz, 52
lista, 5
Lovász, 44, 76

mélységi keresés, 10
mélységi keresőfa, 11
Menger-tételek, 58
minimax tételek, 57
mohó algoritmus, 39
mutató, 6

Nagamochi-Ibaraki, 61
Nagy Zsigmond, 73
nagyságrend, 7
napraforgó, 71

ordó, 7

Pál, 81
páros gráf, 14
Pósa, 46
permutációs módszer, 71
pointer, 6

részben rendezett halmaz, 66
részleges párosítás, 14
Ramsey, 21, 23
Ramsey-tétel, 19
Reimann, 56
ritka gráf, 6

síkbarajzolható gráf, 30
síkbarajzolt gráf, 30
síkgráf, 30
Scott-probléma, 89
Spencer-Szemerédi-Trotter, 52
Sperner, 2, 69
Stirling-szám, 86
Sylvester, 55
szám-partíciók, 89
szélességi keresés, 7
szétvágó él, 10
szétvágó pont, 10
Szekeres, 19
szita-formula, 84
szita-módszer, 84

tömb, 5
teljes r osztályú gráf, 47
teljes gráf, 19
teljes párosítás, 14
Turán, 47
Turán-gráf, 47

Ungár, 90
uniform, 70

vágás kapacitása, 63
véges geometria, 53
végtelen út, 3

Ajánlott irodalom

Bevezető

Elekes György: Kombinatorika feladatok. ELTE jegyzet, 1992.

Andrásfai Béla: Gráfelmélet. Polygon könyvtár, 1997.

Hajnal Péter: Gráfelmélet. Polygon jegyzettár, 1997.

Hajnal Péter: Elemi kombinatorikai feladatok. Polygon könyvtár, 1997.

Hajnal Péter: Összeszámlálási problémák. Polygon jegyzettár, 1997.

Algoritmusok

Rónyai Lajos–Ivanyos Gábor–Szabó Réka: Algoritmusok. TypoTEX Kiadó, 1998. (Kitűnő bevezető.)

Cormen–Leiserson–Rivest: Algoritmusok. (Monográfia) Műszaki Könyvkiadó, 1997.

Lineáris algebrai módszerek – sok geometriával

László Babai–Péter Frankl: Linear Algebra Methods in Combinatorics (Még nem jelent meg; fénymásolva terjed.)

Mély eredmények, feladatok formájában

Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok. TypoTEX Kiadó, 1999. (A véges matematika legnevezetesebb – és legjobb – monográfiája.)

Kézikönyv

Handbook of combinatorics. Edited by R. L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász. Elsevier Science B.V., Amsterdam; MIT Press, Cambridge, MA, 1995.